UNS
UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL SANTA

ESCUELA DE POSTGRADO

DOCTORADO EN MATEMÁTICA

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL NO LINEAL ESTACIONARIA DEL TIPO ELÍPTICO

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

DOCTORANDO:

Mg. HERÓN JUAN MORALES MARCHENA

ASESOR:

DR. MILTON MILCIADES CORTEZ GUTIÉRREZ

NUEVO CHIMBOTE, PERÚ
2014

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL NO LINEAL ESTACIONARIA DEL TIPO ELÍPTICO.

AUTOR: Mg. HERÓN JUAN MORALES MARCHENA.

ASESOR: Dr. MILTON M. CORTEZ GUTIÉRREZ.

Tesis de Doctorado aprobado por los siguientes miembros:

JURADO EVALUADOR

Dr. Edmundo Vergara Moreno
Presidente

Dr. Milton Cortez Gutiérrez
Secretario

Dra. Loreley Vásquez Correa
Vocal

FICHA CATALOGRÁFICA

Morales Marchena Herón Juan

TÍTULO: EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL NO LINEAL ESTACIONARIA DEL TIPO ELÍPTICO.

TESIS DE DOCTORADO. Escuela de Postgrado Universidad Nacional del Santa.

ASESOR: Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez.

1. Existencia y Unicidad.
2. Ecuación Diferencial Parcial no Lineal.

DEDICATORIA

A mis padres Germán y Leonarda por sus sabios consejos, confianza y apoyo incondicional toda la vida.

A mi esposa Rosa María, mis hijos Roberth y Mariarrosa que me brindaron su valioso tiempo para efectuar mis estudios.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr Milton Milciades Cortez Gutiérrez, por su invalorable apoyo en la asesoría de la presente investigación.

A la plana docente del Programa de Doctorado de la Universidad Nacional del Santa, por su desprendimiento personal que hizo realidad el presente Doctorado.

Herón

RESUMEN

En la presente investigación se demostró la existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial y}\right)=-f \quad \text{en } \Omega$$

Considerando para ello la ecuación como un operador diferencial se obtuvo una base en el espacio $H_0^1(\Omega)$. Donde: Ω es una región plana convexa, $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Palabras claves: Operador diferencial, Desigualdad de Poincaré, Norma estrictamente convexa, Distribuciones y Espacio de funciones de Prueba y Espacios de Sobolev.

ABSTRACT

In the present investigation there was demonstrated the existence and uniqueness of solution of a differential partial not linear stationary equation of the elliptical type of the form:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial y}\right)=-f \quad \text{in} \quad \Omega$$

Considering for it the equation as a differential operator a base was obtained in the space $H_0^1(\Omega)$. Where: Ω it is a flat convex region , $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Keywords: Differential operator, Poincaré's Inequality, strictly convex Norm, Distributions and Space of functions of Test and Sobolev's Spaces

INDICE

Dedicatoria
Agradecimiento
Índice
Resumen
Abstract

I.- INTRODUCCIÓN 1
1.1. Realidad Problemática 3
1.2. Estado del Arte del Tema de la Investigación 7
1.3. Caracterización y Naturaleza del Objeto de Investigación 9
1.4. Formulación del Problema 10
1.5. Formulación de la Hipótesis 10
1.6. Formulación de los Objetivos de la Investigación 11
1.7. Importancia y Justificación de la Investigación 11

II.- MARCO TEÓRICO 18
2.1. Fundamentos Filosóficos Teóricos de la Investigación 18
2.2. Marco Conceptual 19
2.3. Espacio de Funciones de Prueba 19
2.4. Teoría de Distribuciones 20
2.5. Espacios de Sobolev 28

III.- METODOLOGÍA EMPLEADA
3.1. Métodos Empleados en la Investigación 33
3.2. Metodología para la Prueba de Hipótesis 33
3.3. Técnicas e Instrumentos Empleados 33
3.4. Procedimiento de la Recolección de Datos 34

IV.- DESARROLLO DEL ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN 35

V.- CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS
5.1. Conclusiones 40
5.2. Sugerencias 41

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 42
APENDICE 44

I. INTRODUCCIÓN

La teoría de las Ecuaciones Diferenciales Parciales es con toda seguridad la disciplina de las matemáticas con una más clara motivación aplicada en los problemas de la física matemática, las cuales se desarrollaron notablemente en el siglo XVIII a partir de la Teoría de la Mecánica de los Medios Continuos, así como la conducción del calor, Mecánica de los Fluidos, electromagnetismo, mecánica cuántica, la Física Relativista y otras partes de la Física(Ríbnikov, K. A, 1987).

Estas Ecuaciones Diferenciales Parciales, en particular las de segundo orden se encuentran con frecuencia en problemas de vibraciones potenciales, dinámica de fluidos y distribuciones de temperatura, donde su solución en la mayoría de casos presenta un sin número de condiciones y restricciones, sumándose a ella la no linealidad de la ecuación y la no existencia de la derivada desde el punto de vista clásico.

La presente investigación surge a raíz del estudio de la transmisión estacionaria de calor por conducción con una fuente externa de calor distribuida en una lámina, la cual matemáticamente es modelada por la ecuación diferencial lineal elíptica de Poisson:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial u}{\partial y}\right)+Q(x,y)=0$$

Siendo $u(x,y)$:temperatura, k_x y k_y las conductividades en las direcciones de x e y constantes, llevándonos a considerar la conductividad no constante y dependiente de la función temperatura.

Frente a lo anteriormente mencionado nos preguntamos:

¿ Existe y es única la solución de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-f \quad \text{en} \quad \Omega \quad \ldots(*)$$

Donde: Ω es una región plana convexa, $u/_{\partial\Omega}=g$?.

El objetivo general planteado en la investigación fue: Demostrar la existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico(*).

La importancia del presente estudio radica en que contribuirá en el campo de soluciones de las Ecuaciones Diferenciales Parciales no Lineales de segundo orden del tipo elíptico para fenómenos estacionarios (que no cambian con el tiempo).

1.1. Realidad Problemática

Las ecuaciones diferenciales parciales constituyen una potente herramienta para describir procesos o sistemas que se dan en la naturaleza. En el mundo de la ingeniería son múltiples los ejemplos, desde el estudio del movimiento armónico simple en muelles hasta las ecuaciones no lineales de la mecánica de fluidos, por citar algunos.

El interés de la comunidad científica en el análisis no lineal ha ido creciendo significativamente en las últimas décadas. Prácticamente todos los centros de investigación en Matemática en el mundo dedican un esfuerzo sustancial al entendimiento de los problemas no lineales, lo que ha permitido no solamente el tratamiento unificado de varios problemas clásicos en Física y en Matemática sino también el surgimiento de nuevas teorías no lineales de gran importancia por sí mismas y por sus aplicaciones. Una de las herramientas más importante usada en análisis no lineal es la *teoría de bifurcación*. Es decir cuando existen cambios en la estructura del conjunto de soluciones de una ecuación funcional.

Uno de los casos particulares en el vasto conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales lo constituyen las ecuaciones diferenciales parciales no lineales de 2° orden, los cuales tienen un origen en el modelo:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=f(x,y)\ \ldots(+)$$

Donde la no linealidad en la ecuación diferencial parcial de 2° orden(+) es determinada por el exponente diferente de 1, que debe tener la función incógnita o una de sus derivadas.

Estas ecuaciones son clasificadas en elípticas, parabólicas e hiperbólicas:

Hiperbólica, si $B^2 - 4AC \succ 0$.

Parabólica, si $B^2 - 4AC = 0$.

Elíptica, si $B^2 - 4AC \prec 0$..

Según esto, las clásicas ecuaciones de difusión, de ondas y de Laplace pertenecen a los siguientes casos:

Ecuación de difusión: parabólica

Ecuación de onda: hiperbólica

Ecuación de Laplace: elíptica.

Esta clasificación sigue siendo válida incluso cuando los coeficientes de la ecuación diferencial parcial, A, B, C, D, E y F son funciones de las variables x e y. En estos casos la ecuación puede cambiar de tipo al pasar de un cuadrante a otro, como por ejemplo la ecuación:

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Es hiperbólica en la región $x^2 - y^2 \succ 0$, parabólica a lo largo de las rectas $x^2 - y^2 = 0$, y es elíptica en la región $x^2 - y^2 \prec 0$.

Y son estas categorías de ecuaciones diferenciales parciales las que modelan en su mayoría los problemas en ingeniería.

Este tipo de ecuaciones diferenciales parciales provienen de operadores diferenciales de segundo orden. Esto es:

$$L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$$
$$u \dashrightarrow L(u) = f$$

Donde: Ω es un subconjunto abierto no vacío de R^2 y convexo.

$C^2(\Omega)$ es un conjunto de funciones de Ω en R, dos veces diferenciable con continuidad.

En la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales parciales se plantean 3 tipos característicos de condiciones de contorno, las de Dirichlet, las de Neumann y las de Robin o Mixta.

Sea Ω el dominio de las variables espaciales donde está definida una ecuación diferencial parcial y sea $\partial\Omega$ la frontera de Ω.

1. La condición de contorno: $u = g$ sobre $\partial\Omega$, siendo g una función conocida, se conoce como **condición de Dirichlet.**
2. La condición de contorno: $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sobre $\partial\Omega$, siendo $\frac{\partial u}{\partial n}$ la derivada normal exterior a Ω en cada punto de $\partial\Omega$, es decir:

   $\frac{\partial u}{\partial n} = grad(u).n$, se conoce como **condición de Neumann.**

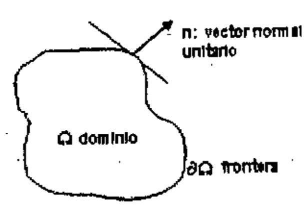


Figura 1: Condiciones de contorno

Observación: La frontera $\partial\Omega$ debe ser tal que en todo punto existe ∇u y el vector normal unitario **n**.

3. La condición de contorno: $\frac{\partial u}{\partial n}+ku=g$, siendo **k** una constante y **g** una función conocida, se conoce como **condición de Robin**.

Para cualquiera de los problemas antes señalados, es usual plantearse las siguientes cuestiones:

a. **Existencia** de solución. Se trata de obtener al menos una solución del problema.

b. **Unicidad** de la solución. Se trata de probar que existe una única solución, y de existir otra, la diferencia entre ellos será la solución nula.

c. **Estabilidad** de la solución. Se trata de hallar una solución estable, es decir, ella no cambia bruscamente si hacemos un pequeño cambio en los datos. Este problema se resuelve probando una dependencia continua entre la solución y los datos.

La mejor manera de demostrar la existencia de solución es considerando el método de Faedo - Galerkin, y si probamos la unicidad, entonces tendremos la solución buscada.

El estudio de las tres cuestiones fundamentales: existencia, unicidad y estabilidad (y/o regularidad) constituyen el corazón de la teoría de las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

1.2. Estado del Arte del Tema de la Investigación

Los problemas que involucran ecuaciones diferenciales parciales no lineales han venido siendo desarrollados desde diferentes perspectivas, según la Base de Datos del Ministerio de Educación y Ciencia de España, la Universidad de Sevilla en el caso de los problemas no lineales de la mecánica de fluidos incompresibles, existe un modelo del tipo elíptico estacionario modelado netamente con herramientas matemáticas basados experimentalmente como son los números de Reynolds, presión de fluidos, velocidad, etc.véase(Gómez , 1997 y Climent, 1995), la solución de problemas singulares en ecuaciones elípticas y elasticidad en presencia de singularidades, es resuelto utilizando el método de elementos finitos junto con unos elementos finitos especiales, denominados elementos singulares, demostrando que a partir de transformaciones conformes se pueden generar cierto tipo de elementos singulares(Alonso, 1993).

Con respecto a sistemas de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el comportamiento de ciertas clases de fluidos no newtonianos, se ha encontrado un estudio teórico donde se considera un modelo para fluidos de bingham, pseudoplásticos y dilatantes en densidad variable, para estos modelos se obtienen resultados de existencia de solución global en tiempo en varios sentidos: solución muy débil, débil y medida-valuada, véase(Robles, 1995), por otro lado también existen modelos relacionados con los sistemas elípticos no lineales y aplicaciones en dinámica de poblaciones, se abordan problemas en forma de sistemas elípticos no lineales, y se ofrecen interpretaciones de los resultados obtenidos en términos de los modelos de la biología de los que proceden dichos problemas, cabe destacar la elaboración de nuevas técnicas de análisis funcional no lineal que el autor ha necesitado para ser aplicadas a los problemas concretos en los que ha trabajado, así como la generalidad en que se enuncian los distintos resultados obtenidos, tanto para los modelos con difusión lineal, como para aquellos otros de difusión no lineal. asimismo, se hace un tratamiento novedoso para este tipo de problemas consistente en la búsqueda de dominios de coexistencia para un sistema dados, véase(Gámez y Suárez, 1998).

Los problemas de control gobernados por el problema de Dirichlet y Neumann, se han centrado en la existencia de solución, condiciones de optimalidad y regularidad del control óptimo, para un funcional de coste diferenciable, las condiciones de optimalidad se obtienen de la forma habitual en los casos no diferenciables, introduce una familia de problemas que aproximan al problema inicial y pertenecen al caso diferenciable, asa se obtienen las condiciones de optimalidad para cada elemento de la familia y mediante un proceso de paso al límite, finalmente se obtienen las condiciones de optimalidad del problema inicial, véase(Fernández y Doubova, 1995), y los problemas relacionados con ecuaciones diferenciales parciales de evolución no lineales, donde se aborda el problema de la controlabilidad aproximada del sistema de navier-stokes con control frontera, así como otros problemas relacionados con este, así mismo se aporta una respuesta parcial a la densidad del subespacio generado por los estados finales, véase(González, 1995).

Asimismo existen otros modelos que conllevan a las ecuaciones diferenciales parciales estocásticas tal como la ecuación de ITO entre los que también tratan (Garrido, 2001) y un estudio teórico de algunas ecuaciones en derivadas parciales no lineales relacionadas con fluidos no newtonianos donde se aporta nuevos resultados de existencia, unicidad y dependencia continua de soluciones para algunos sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que describen el comportamiento de ciertas clases de fluidos no newtonianos, considerando fluidos de bingham, pseudoplásticos y dilatantes con densidad variable y fluidos viscoelásticos de tipo oldroyd, véase (Robles, 1995).

En este trabajo de tesis se va estudiar un modelo que involucra la transmisión estacionaria de calor por conducción con una fuente externa de calor distribuida en una lámina, basado en un modelo del tipo elíptico para posteriormente tratar sobre la existencia y unicidad de solución.

1.3. Caracterización y Naturaleza del Objeto de Investigación

Las ecuaciones diferenciales parciales no lineales de 2° orden, tienen un origen en el modelo:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=f(x,y)\ldots.(+)$$

Donde la no linealidad en la ecuación diferencial parcial de 2° orden(+) es determinada por el exponente diferente de 1, que debe tener la función incógnita o una de sus derivadas, o la multiplicación de la función incógnita con una de sus derivadas.

Estas ecuaciones(+) son clasificadas en elípticas:

Si $B^2-4AC\prec 0$.

Según esto, la clásica ecuación de Laplace en dos dimensiones pertenece al tipo elíptica y representa desplazamientos estáticos de membranas o temperatura de estado estable en una placa rectangular

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Esta clasificación sigue siendo válida incluso cuando los coeficientes de la ecuación diferencial parcial, A, B, C, D, E y F son funciones de las variables x e y. En estos casos la ecuación puede cambiar de tipo al pasar de un cuadrante a otro, como por ejemplo la ecuación:

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Es hiperbólica en la región $x^2-y^2\succ 0$, parabólica a lo largo de las rectas $x^2-y^2=0$, y es elíptica en la región $x^2-y^2\prec 0$.

Y son estas categorías de ecuaciones diferenciales parciales las que modelan en su mayoría los problemas en ingeniería.

En la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales parciales se plantean 3 tipos característicos de condiciones de contorno, las de Dirichlet, las de Neumann y las de Robin o Mixta.

La solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales no Lineales, en la mayoría de casos presenta un sin número de condiciones y restricciones, sumándose a ella la existencia de la derivada desde el punto de vista clásico en la presente investigación se ha considerado la Teoría General de Distribuciones lo que nos ha permitido generalizar las funciones y formular soluciones generalizadas en los Espacios de Sobolev.

1.4. Formulación del Problema

Frente a lo anteriormente mencionado nos preguntamos:

¿ Existe y es única la solución de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial y}\right)=-f \quad \text{en} \quad \Omega \qquad \ldots(*)$$

Donde: Ω es una región plana convexa, $u/_{\partial\Omega}=g$?.

1.5. Formulación de la Hipótesis

Se considera $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$

El operador diferencial admite una base en el espacio $H_0^1(\Omega)$.

1.6. Formulación de los Objetivos de la Investigación

Objetivo general:

- Demostrar la existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico.

Objetivos específicos:

- Profundizar los conocimientos teóricos referidos a: Espacio de funciones de Prueba, Distribuciones, y Espacios de Sobolev.
- Demostrar la existencia de solución de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico.
- Demostrar la unicidad de solución de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico.

1.7. Importancia y Justificación de la Investigación

La mayoría de las leyes de la física están gobernadas por ecuaciones diferenciales parciales: las ecuaciones de Maxwell, la ley de enfriamiento de Newton, las leyes de Kleper, la ecuación de Navier – Stokes, la ecuación del momentum de Newton, la ecuación de Schrodinger de la mecánica cuántica, la ecuación del telégrafo, la ecuación de Sine – Gordon, la ecuación de Helhmoltz, etc.

Las ecuaciones diferenciales parciales en particular las de segundo orden del tipo elíptico aparecen en el estudio de fenómenos estacionarios (que no cambian con el tiempo). Por ejemplo, pueden aparecer al estudiar el comportamiento para tiempos grandes de un sistema en el que está teniendo lugar un proceso de tipo difusivo. Recordemos que en una dimensión la ecuación del calor es $u_t = \alpha^2 u_{xx}$, cuya generalización a dimensiones mayores es:

$$u_t = \alpha^2 \nabla^2 u$$

Pues bien, suponiendo que para tiempos grandes se alcanza una solución estacionaria independiente del tiempo, tendremos $u_t = 0$ y la ecuación resultante será:

$$\nabla^2 u = 0$$

que es una ecuación de tipo elíptico, la ecuación de Laplace, a la que habrá que añadir las condiciones de contorno adecuadas si el sistema es finito. De hecho la ecuación anterior es el prototipo de problemas elípticos, y describe, entre otros muchos fenómenos de interés, el potencial electrostático en el vacío. Otro ejemplo de ecuación elíptica es la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 u = \rho$$

que describe el potencial electrostático en una región donde hay una distribución de carga ρ. Otro campo donde aparecen ecuaciones elípticas es en la resolución mediante el método de separación de variables de problemas difusivos u ondulatorios. Por ejemplo, la ecuación de Helmhotz

$$\nabla^2 u + \lambda^2 u = 0$$

que aparecía en el estudio de las vibraciones de una membrana circular.

Por supuesto, si el sistema no es infinito la ecuación diferencial debe suplementarse con las condiciones de contorno correspondientes, y en cualquier caso siempre hay que tener en cuenta las condiciones de aceptabilidad física de las soluciones (finitud, periodicidad adecuada en los sistemas de coordenadas que lo requieran, etc.) Lo que evidentemente no existe en problemas elípticos son condiciones iniciales, ya que el tiempo no interviene como variable en este tipo de problemas.

Por otro lado las derivadas parciales que aparecen no siempre existen desde el punto de vista clásico es por eso que también se requiere el uso de la teoría de las distribuciones para poder generalizar a una derivada generalizada en la que la solución del modelo a tratar será en los espacios funcionales como son los espacios de Sobolev, etc.

La ecuación de Poisson expresa matemáticamente el comportamiento de numerosos problemas físicos:

En 1D: $$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + Q(x) = 0$$

En 2D: $$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + Q(x,y) = 0$$

En forma general: $k\nabla^2\phi + Q = 0$.

Donde: ϕ : incógnita del problema.

k : coeficiente que expresa una propiedad física del sistema.

∇^2 : operador Laplaciano.

A modo de ejemplo presentamos la ecuación de Poisson en la formulación de dos problemas físicos.

1.7.1. Transmisión estacionaria de calor por conducción en una barra(1D).

A). Sea un dominio unidimensional(barra), representado en la figura siguiente en el cual se transmite calor por conducción en régimen permanente.

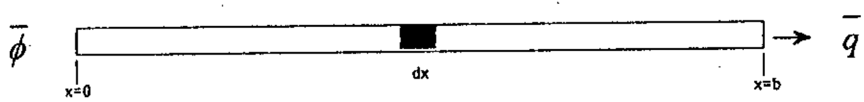


Figura 1.1: Dominio unidimensional.

Donde ϕ :temperatura, q :flujo de calor y las condiciones de contorno:

$\Gamma_\phi : \bar{\phi} = \phi_{|x=0}$, la temperatura en $x = 0$.

$\Gamma_q : \bar{q} = q_{|x=b}$, el flujo de calor en $x = b$.

Planteando el 'equilibrio' o condición de balance de flujos de calor en el elemento diferencial de la barra.

Flujo que entra: q

Flujo que sale: $q + dq$

Se tiene $(q + dq) - q = 0, \rightarrow dq = 0.$

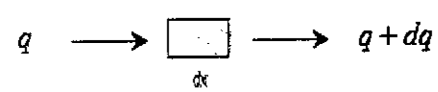


Figura 1.2: Balance de flujos de calor en un dominio unidimensional.

La relación entre el flujo de calor q y la temperatura ϕ viene expresada por la ley de Fourier.

$$q = -k\frac{d\phi}{dx}$$, siendo k el coeficiente de conductividad térmica.

Diferenciando se tiene: $dq = \frac{dq}{dx}dx$

$$dq = -\frac{d}{dx}(k\frac{d\phi}{dx})dx$$

$$\frac{d}{dx}(k\frac{d\phi}{dx})dx = 0$$ ... ecuación de balance térmico

B). Supongamos que ahora la barra recibe una cantidad externa de calor Q por unidad de longitud.

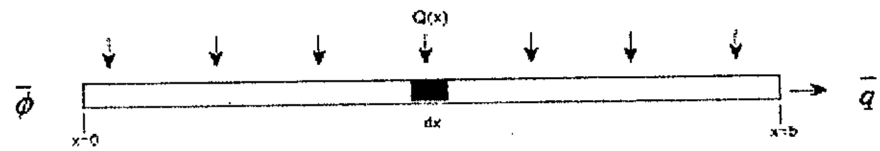


Figura 1.3: Dominio unidimensional. con calor externo.

Donde ϕ :temperatura, q :flujo de calor y en las condiciones de contorno:

$$\Gamma_{\phi} : \bar{\phi} = \phi_{|x=0} \text{ , la Temperatura en } x=0.$$

$$\Gamma_{q} : \bar{q} = q_{|x=b} \text{ , el Flujo de calor en } x=b.$$

Planteando el 'equilibrio' o condición de balance de flujos de calor en el elemento diferencial de la barra.

Flujo que entra: $q+Q(x)dx$

Flujo que sale: $q+dq$

Se tiene $(q+dq)-q-Q(x)dx=0$, $\quad \dfrac{dq}{dx}-Q(x)=0$

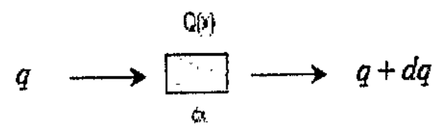


Figura 1.4: Balance de flujos de calor con calor externo.

Reemplazando: $\dfrac{d}{dx}(-k\dfrac{d\phi}{dx})-Q(x)=0$

$$\frac{d}{dx}(k\frac{d\phi}{dx})+Q(x)=0 \quad \text{... ecuación de balance térmico}$$

1.7.2 Transmisión estacionaria de calor por conducción en una làmina(2D).

Sea un dominio bidimensional(lámina), representado en la figura siguiente en el cual se transmite calor por conducción en régimen permanente.

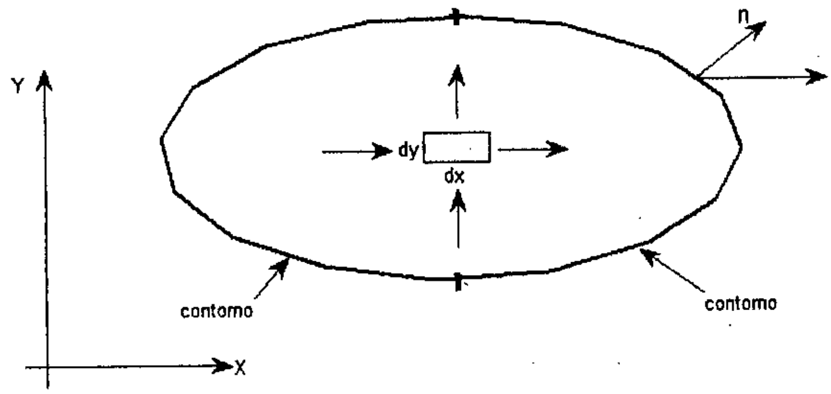


Figura 1.5: Dominio bidimensional.

Donde $\phi(x,y)$:temperatura, k_x y k_y son las conductividades en las direcciones de x e y respectivamente.

Dicha ecuación se puede obtener planteando el balance de flujos para un elemento diferencial.

Flujo que entra en la dirección de x: q_x

Flujo que sale en la dirección de x: $q_x + dq_x$

Se tiene $(q_x + dq_x) - q_x = 0 \quad \rightarrow \quad dq_x = 0.$

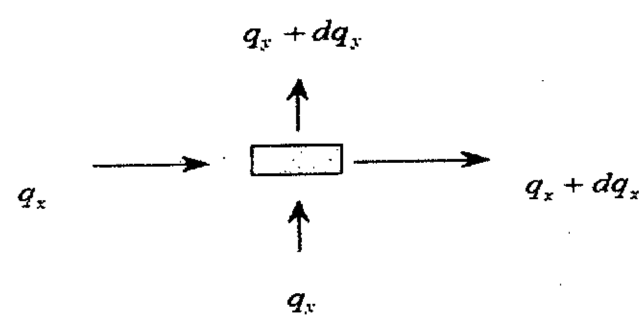


Figura 1.6: Balance de flujos de calor en un dominio bidimensional.

La relación entre el flujo de calor q_x y la temperatura ϕ viene expresada por la ley de Fourier.

$q_x = -k_x \dfrac{\partial \phi}{\partial x}$, de donde se tiene: $dq_x = \dfrac{\partial q_x}{\partial x} dx = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-k_x \dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right)$ ... (1)

De la misma forma para el flujo de calor en la dirección de y se tiene:

$$(q_y + dq_y) - q_y = 0 \quad \rightarrow \quad dq_y = 0.$$

$$dq_y = \frac{\partial q_y}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x}\left(-k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \quad \ldots \quad (2)$$

Sumando (1) y (2)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = 0$$ ... ecuación de balance térmico

La ecuación bidimensional de Poisson en régimen estacionario es

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + Q(x,y) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Siendo ϕ (x,y) la función incógnita. k_x y k_y son las conductividades en direcciones x e y respectivamente y Q (x,y) es una fuente distribuida sobre el dominio Ω .

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Fundamentos Filosóficos Teóricos de la Investigación

La teoría de las Ecuaciones Parciales es con toda seguridad la disciplina de las matemáticas con una más clara motivación aplicada en los problemas de la física matemática, en particular las de segundo orden se encuentran con frecuencia en problemas de vibraciones potenciales, dinámica de fluidos y distribuciones de temperatura. La solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Lineales, en la mayoría de casos presenta un sin número de condiciones y restricciones, como por ejemplo la no linealidad de la ecuación, y la no existencia de la derivada desde el punto de vista clásico.

En la presente investigación empezaremos por motivar la necesidad de buscar un nuevo concepto de solución de una ecuación diferencial. Ello nos debería conducir de un modo natural a problemas donde aparece la "derivada" de una función discontinua. Obviamente en ese tipo de problemas las derivadas convencionales no están definidas, pero existen substituciones formales que sugieren que el concepto de función matemática debe ser ampliado para incluir objetos que pudieran comportarse como la derivada convencional, pero que fuera además aplicable a funciones discontinuas, esto es la Teoría General de Distribuciones, seguidamente introduciremos las distribuciones en los espacios de Sobolev, dado que estos espacios proporcionan un recurso extraordinario para el planteo y la búsqueda de soluciones de problemas de contorno. Esto es así porque estos espacios son completos y porque permiten obtener resultados generales respecto a la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. Otra gran ventaja de los espacios de Sobolev radica en que nos van a permitir caracterizar el grado de regularidad de funciones y porque muchos de los métodos de aproximación, tales como el método de Ritz o el de los Elementos Finitos, son adecuados y correctamente formulados cuando se lo hace en el ámbito de estos espacios.

2.2. Marco Conceptual

2.2.1. Espacio de Funciones de Prueba: Ð(Ω)

Definición 2.2.1.1. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $u:\Omega \to \mathbb{R}$ una función. Se llama soporte de u y se denota por $spp(u)$ al subconjunto definido por: $spp(u) = \overline{\{x \in \Omega / u(x) \neq 0\}}$.

Definición 2.2.1.2. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, una función $u:\Omega \to \mathbb{R}$, es llamada función de prueba, si cumple las siguientes condiciones:

i. $u \in C^\infty(\Omega)$, u es infinitamente diferenciable, con derivadas continuas de todos los órdenes sobre Ω.

ii. $spp(u) \subset K$, K compacto.

Ejemplo 1. Dada la función:

$$w(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & , |x| \prec 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$$

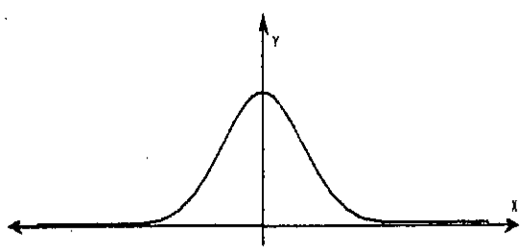


Figura 2.1: Función de prueba.

i. $w \in C^\infty(\mathbb{R})$, u es infinitamente diferenciable, con derivadas parciales continuas de todos los órdenes.

ii. $spp(w) = [-1,1] \subset K = [-1,1]$, K compacto.

El conjunto de funciones de prueba con soporte compacto se denota por $C_o^\infty(\Omega)$.

Definición 2.2.1.3. Una sucesión $(u_n)_{n\geq 1} \subset C_o^\infty(\Omega)$ **converge** hacía u en $C_o^\infty(\Omega)$ si:

i. $spp(u_n) \subset K$, K compacto, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii. $D^{\alpha}u_n \to D^{\alpha}u$, las derivadas convergen uniformemente $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

$(\alpha \in \mathbb{N}^n, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{N})$

El conjunto $C_o^{\infty}(\Omega)$ unido a la definición de convergencia 2.2.1.3, define el espacio de funciones de prueba con soporte compacto, denotado por $Ð(\Omega)$.

2.2.2. Teoría de Distribuciones

En diversos ejemplos físicos idealizados aparecen objetos matemáticos (cuasi-funciones) similares a las funciones convencionales cuyo uso daba soluciones consistentes a diversos problemas físicos, pero que no podían ser tratados estrictamente como funciones matemáticas convencionales. Algunos ejemplos de problemas donde aparecían estas "cuasi-funciones":

- Problemas donde aparecía la "derivada" de una función discontinua. Obviamente en ese tipo de problemas las derivadas convencionales no estaban definidas, pero existían substituciones formales que sugerían que el concepto de función matemática debía ser ampliado para incluir objetos que pudieran comportarse como la derivada convencional, pero que fuera además aplicable a funciones discontinuas.
- Igualmente Dirac introdujo un objeto matemático δ que debía tener la siguiente propiedad:

$$f(a) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-a) f(x) dx$$

Aunque ese objeto matemático compartía ciertas propiedades con las funciones referente a su integración, se podía probar que no existía ninguna función matemática convencional δ que fuera solución de la anterior ecuación.

Los dos problemas anteriores están relacionados, y la teoría de distribuciones demostró que pueden definirse un tipo de funciones generalizadas o distribuciones tales que permiten tratar rigurosamente los dos problemas anteriores. El concepto de distribución generaliza al de función, ya que de hecho toda función matemática convencional puede ser considerada también como un caso particular de distribución.

En su definición formal, las distribuciones son una clase de funcionales lineales que trazan un conjunto de funciones de prueba en el conjunto de los números reales.

Definición 2.2.2.1. Una funcional lineal $T:Ð(\Omega)\to\mathbb{R}$ es llamada distribución si T es continua.

Esto es:

i. T funcional.

Es decir. Para cada función $u\in Ð(\Omega)$, se le asocia un escalar $T(u)$ que designaremos por $\langle T,u\rangle$.

ii. T lineal.

Es decir. $\langle T,\alpha u+\beta v\rangle=\alpha\langle T,u\rangle+\beta\langle T,v\rangle$.

iii. T continua.

Es decir: Para toda sucesión $\{u_n\}$ convergente en $Ð(\Omega)$, sus imágenes $\{T(u_n)\}$ forman una sucesión convergente en $\mathbb{R}$, obteniendo:

$$\lim_{n\to\infty}(T(u_n))=T\left(\lim_{n\to\infty}u_n\right)\quad o\quad \lim_{n\to\infty}\langle T,u_n\rangle=\left\langle T,\lim_{n\to\infty}u_n\right\rangle$$

Ejemplo 2.

Dado $x_o\in\Omega$, se llama distribución Delta de Dirac centrada en x_o a la aplicación:

$$\begin{aligned}\delta_{x_o}&:Ð(\Omega)\to\mathbb{R}\\ \varphi&\to\langle\delta_{x_o},\varphi\rangle=\varphi(x_o)\end{aligned}$$

Por otro lado se define la suma de distribuciones y el producto por un escalar de la siguiente forma:

$$(T_1+T_2)(u)=T_1(u)+T_2(u)\quad;\quad(\alpha T)(u)=\alpha T(u)\quad ó$$

$$\langle T_1+T_2,u\rangle=\langle T_1,u\rangle+\langle T_2,u\rangle\quad y\quad \langle\alpha T,u\rangle=\alpha\langle T,u\rangle$$

Con lo que el conjunto de distribuciones tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y se designa por $Ð'$ (espacio dual de $Ð$).

2.2.3. Funciones localmente integrables

Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, una función $u:\Omega \to \mathbb{R}$, se dice que es localmente integrable $\forall\, K \subset \Omega$, K compacto, si $\int_k |u(x)|\,dx \prec \infty$.

El conjunto de todas las funciones localmente integrables para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$, se denota por: $L^1_{loc}(\Omega)$.

2.2.4. Derivada débil

Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$; $\exists\, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ llamada derivada débil de u talque satisface: $\int_\Omega u(x)\dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx$, $\forall \varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R})$, en este caso $v = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1,2,\dots,n$

Equivalentemente

$$\int_\Omega u.\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}.\varphi dx \quad , \quad \forall \varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R})$$

Ejemplo 3.

Sea $f(x) = |x|$

Consideremos $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función de prueba.

Es decir:

i. $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$

ii. $spp(\varphi) \subset K$, K compacto.

Llamemos $h(x)$ la derivada de $f(x)$.

Integrando por partes la siguiente integral $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = 0 - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

$u = \varphi(x) \quad ; dv = h(x)dx$

$du = \varphi'(x)dx \ ; \ v = f(x) \quad , \quad \varphi \in C_o^{\infty}(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)dx \, , \forall \varphi \in C_o^{\infty}(\mathbb{R})$$

$h(x)$ es la derivada débil de f(x).

Calculando h(x)

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)dx - \int_{0}^{\infty} x\varphi'(x)dx$$

$u = x \quad ; dv = \varphi'(x)dx$

$du = dx \quad ; \ v = \varphi(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)dx = x\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} -1\varphi(x)dx - x\varphi(x)\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} 1\varphi(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} -1\varphi(x)dx + \int_{0}^{\infty} 1\varphi(x)dx$$

De donde:

$$h(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad x < 0 \\ 1 & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

$h(x)$ es la derivada débil de f(x) y es independiente de φ.

Observación.- La derivada clásica depende que f sea diferenciable, mientras que en la derivada débil f debe ser integrable.

2.2.5. Lema de Dubois - Reymond

Sea $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ y $\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x).\varphi(x)dx = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, se tiene que $u = 0$, a.e en Ω.

Consecuencias:

a). $T_u \in Ð'(\Omega)$.

b). Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ entonces T_u es uno a uno.

T_u es llamado distribucional asociado a una función u localmente integrable en todo compacto, además $\langle T_u, \varphi \rangle$ representa $T_u(\varphi)$.

2.2.6. Derivada Distribucional

Definición 2.2.6.1. Sea $T : Ð(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ una distribución, la distribución $\dfrac{\partial T}{\partial x_i} : Ð(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada derivada de T respecto a x_i en el sentido de las distribuciones, si se verifica que:

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, u \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle, \quad \forall u \in Ð(\Omega)$$

$$\int_\Omega \frac{\partial T}{\partial x_i} .u dx = -\int_\Omega T . \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \quad \forall u \in Ð(\Omega)$$

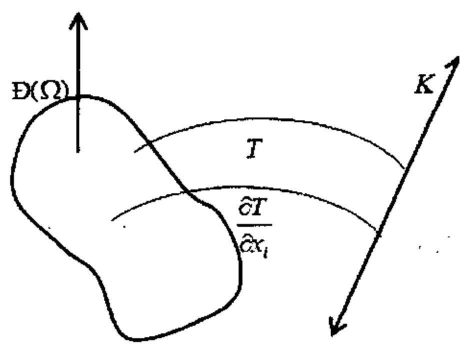


Figura 2.2: Derivada de una distribución.

2.2.6.1. Proposición. $T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i} T_u$

La distribucional asociada a la derivada de u respecto a x_i coincide con la derivada respecto a x_i de la distribucional asociada a u en el sentido de las distribuciones.

$T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}$: distribucional asociada a la derivada de u respecto a x_i.

$\frac{\partial}{\partial x_i} T_u$: derivada con respecto a x_i de la distribucional asociada a u.

Demostración.

$$\left\langle T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}, \varphi \right\rangle = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}.\varphi dx \underset{\text{int eg.por partes}}{=} -\int_\Omega u.\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\left\langle T_u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T_u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle$$

$$\left\langle T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T_u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle, \ \forall \varphi \in \mathrm{Đ}(\Omega)$$

$$T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i} T_u$$

2.2.6.2. **Propiedades.**

- Si $u \in C^1(\Omega)$, su derivada clásica coincide con su derivada en el sentido de las distribuciones.
- Una distribución es infinitamente derivable en el sentido de las distribuciones.

Ejemplo 4. La función salto de Heaviside $\theta(x)$ tiene por derivada la función delta de Dirac: $\theta'(x) = \delta(x)$.

Ejemplo 5. Si una función admite una derivada ordinaria, entonces la derivada en el sentido de las distribuciones coincide con ella.

Ejemplo 6. Consideremos la función:

$$u(x) = \begin{cases} 1+x & ; \quad -1 \le x < 0 \\ 1-x & ; \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$u \in L^2(\langle -1,1 \rangle)$, por tanto es una distribución.

Sea $\varphi \in Ð(\langle -1,1 \rangle)$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle &= -\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_{-1}^{0} (1+x)\varphi'(x)dx - \int_{0}^{1} (1-x)\varphi'(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0} 1\varphi(x)dx + \int_{0}^{1} (-1)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

De donde se tiene la derivada distribucional de u.

$$u'(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad -1 < x < 0 \\ -1 & ; \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Graficamente:

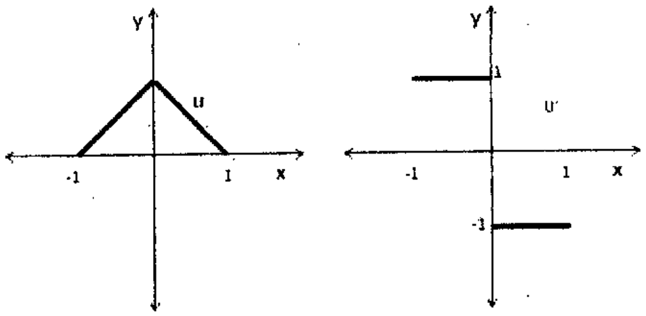


Figura 2.3: Distribucional. Figura 2.4: Derivada distribucional.

2.2.7. Sucesiones Regulares

Definición 2.2.7.1. $(\rho_m)_{m\geq 1}$ es una sucesión regular si:

i. $\rho_m \in C_o^\infty(\Omega)$, $spp(\rho_m) \subset B(0,1/m)$

ii. $\int \rho_m = 1$, $\rho_m \geq 0$ en Ω.

2.2.7.2. **Teorema.** $C_o^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \prec \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Prueba.

Dado $f \in L^p(\Omega)$, demostraremos que existe (f_j) en $C_o^\infty(\Omega)$ talque $f_j \to f$ en $L^p(\Omega)$.

En efecto. Sea la cadena de conjuntos compactos en Ω, $k_o \subset k_1 \subset ... \subset k_j \subset ...$
Sea la función característica de k_j , x_{k_j} y definamos $g_j = fx_{k_j}$.

Luego si $j \to \infty$, $g_j(x) \to f(x)$, $\forall x \in \Omega$.

Además $g_j \to f$ en $L^p(\Omega)$.

Esto es: $\int |f(x) - g_j(x)|^p dx = \int |f(x) - fx_{k_j}(x)|^p dx \to 0$, por el teorema dominado de Lebesgue.

Ahora definamos $f_j = g_j * \rho_j$. Entonces $f_j \in C_o^\infty(\Omega)$ y $\|f_j - f\|_{L^p} \leq \|f_j - g_j\|_{L^p} + \|g_j - f\|_{L^p} \to 0$, donde $\|g_j - f_j\|_{L^p} \to 0$

2.2.8. **Espacios de Sobolev**

Los espacios de Sobolev, pueden ser descritos brevemente, como las clases de funciones que poseen derivadas débiles y ocupan un lugar destacado en el análisis funcional. En las últimas tres décadas se ha producido un gran aporte en la teoría y aplicaciones de estos espacios. Por otra parte, dada la importancia de los mismos en la teoría moderna de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, se han transformado en una herramienta imprescindible para el tratamiento de las mismas. Por ello, últimamente se ha producido un creciente interés por el estudio y uso de parte de ingenieros y físicos, para la resolución de sus problemas.

La teoría de estos espacios es iniciada por matemáticos a principio del siglo XX y en particular por S. I. Sobolev en el año 1930. Si bien son varios los científicos que hicieron sus aportes, como es el caso de Beppo Levi, actualmente toda esa teoría se conoce como espacios de Sobolev. Estos espacios proporcionan un recurso extraordinario para el planteo y la búsqueda de soluciones de problemas de contorno. Esto es así porque estos espacios son completos y porque permiten obtener resultados generales respecto a la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. Otra gran ventaja de los espacios de Sobolev radica en que permiten caracterizar el grado de regularidad de funciones y porque muchos de los métodos de aproximación, tales como el método de Ritz o el de los Elementos Finitos, son adecuada y correctamente formulados cuando se lo hace en el ámbito de estos espacios.

Definición 2.2.8.1. Dado un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, llamamos espacio de Sobolev de orden uno y se denota por $H^1(\Omega)$, al conjunto de funciones u de $L^2(\Omega)$, cuyas derivadas parciales de primer orden en el sentido de las distribuciones, también pertenecen a $L^2(\Omega)$.

Es decir:

$$H^1(\Omega)=\left\{u\in L^2(\Omega):\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2(\Omega);\ i=1,2,...,n\right\}$$

Las operaciones definidas en este conjunto son de adición y multiplicación escalar de funciones.

$H^1(\Omega)$ es un espacio con producto interno, definido por:

$$\ll u,v\gg=\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{n}\left\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega u(x)v(x)dx+\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$$

Demostración. $\forall u,v,w\in H^1(\Omega);\quad \forall\alpha,\beta\in K$

a). $\ll u,u\gg\geq 0$

$$\ll u,u\gg=\langle u,u\rangle_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{n}\left\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega|u(x)|^2\,dx+\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2dx\ \geq\ 0$$

$$\ll u,u\gg=0$$

$$\ll u,u\gg=\langle u,u\rangle_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{n}\left\langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega|u(x)|^2\,dx+\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2dx\ =\ 0$$

$\int_\Omega|u(x)|^2\,dx\ =\ 0$ **y** $\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2dx\ =\ 0$

$u(x)\ =\ 0$ **a.e**, entonces $\frac{\partial u}{\partial x_i}\ =\ 0,\forall i=1...n$ **a.e**

b). $\ll u,v\gg=\ll v,u\gg$

$$
\begin{aligned}
\ll u,v \gg &= \langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \\
&= \int_\Omega v(x)u(x)dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx \\
&= \langle v,u\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i},\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \ll v,u \gg
\end{aligned}
$$

c). $\ll \alpha u+\beta v,\, w \gg = \alpha \ll u,\, w \gg + \beta \ll v,\, w \gg$

$$
\begin{aligned}
\ll \alpha u+\beta v,\, w \gg &= \langle \alpha u+\beta v,\, w\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial(\alpha u+\beta v)}{\partial x_i},\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_\Omega [\alpha u+\beta v](x).w(x)dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial[\alpha u(x)+\beta v(x)]}{\partial x_i}\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}dx \\
&= \alpha\int_\Omega u(x).w(x)dx + \beta\int_\Omega v(x).w(x)dx + \alpha\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}dx + \\
&\quad \beta\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}dx \\
&= \alpha\langle u,\, w\rangle_{L^2(\Omega)} + \beta\langle v,\, w\rangle_{L^2(\Omega)} + \alpha\sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \\
&\quad \beta\sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i},\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \alpha \ll u,\, w \gg + \beta \ll v,\, w \gg
\end{aligned}
$$

$H^1(\Omega)$ es un espacio normado, con la norma:

$$
\|u\| = [\int_\Omega |u(x)|^2\, dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx]^{1/2}
$$

Definición 2.2.8.2. Dado un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, llamamos espacio de Sobolev de orden $m \in \mathbb{Z}^+$ y se denota por $H^m(\Omega)$, al conjunto de funciones u de $L^2(\Omega)$, cuyas derivadas parciales en el sentido de las distribuciones de orden menor o igual a m también pertenecen a $L^2(\Omega)$.

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}.$$

Definición 2.2.8.3. Dado un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, $1 \leq p \leq \infty$, llamamos espacio de Sobolev y se denota por $W^{m,p}(\Omega)$, al conjunto de funciones u de $L^p(\Omega)$, cuyas derivadas parciales en el sentido de las distribuciones de orden menor o igual a m también pertenecen a $L^p(\Omega)$.

Esto es:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m, m \in \mathbb{Z}^+ \}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach, con la norma:

$$\|u\|_{m,p} = [\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m}^{n} \|D^\alpha u\|_p^p]^{1/p} \quad , 1 \leq p \leq \infty$$

Observación: 1.- $W^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $L^p(\Omega)$.

2.- $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.

3.- $H_0^1(\Omega)$ es el subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$.

4.- $W_0^{m,p}(\Omega) = \{ u \in W^{1,p}(\Omega); u(x) = 0, D^\alpha u(x) = 0, x \in \partial\Omega, |\alpha| = m-1\}$.

Definición 2.2.8.4. Dado un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, $1 \leq p \prec \infty$, el espacio dual de $W^{m,p}(\Omega)$ se designa por $(W^{m,p}(\Omega))' = W^{-m,q}(\Omega)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proposición 2.2.8.1. Sea $F \in W^{-1,p}(\Omega)$, entonces existen $f_0, f_1, \ldots, f_n$ en $L^q(\Omega)$ talque: $F(v) = \int_\Omega f_0 v\,dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$ y $\max_{1 \le i \le n} \| f_i \|_q = \| F \|$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2.2.9. Desigualdad de Poincaré.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y acotado, existe una constante $C \succ 0$ talque: $\| u \| \le C \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|$, $\forall u \in W_o^{1,4}(\Omega)$

III. METODOLOGÍA EMPLEADA

3.1. Métodos Empleados en la Investigación

Método Deductivo.- Nos permitió mostrar ejemplos como casos particulares de los resultados obtenidos.

Método Inductivo.- A partir de casos presentados en $\mathbb{R}=\Omega$, se generalizaron los resultados en $\mathbb{R}^n=\Omega$.

Método Hipotético – Deductivo.- A través de la formulación de la hipótesis y mediante procedimientos deductivos se demostraron la existencia y unicidad de la Ecuación Diferencial motivo de la investigación.

3.2. Metodología para la Prueba de Hipótesis

En la demostración de la existencia de solución de la ecuación diferencial no lineal se consideró una base en el espacio $H_0^1(\Omega)$, mientras que en la unicidad fue consecuencia de tomar dos soluciones que satisfacían la ecuación diferencial parcial no lineal.

3.3. Técnicas e Instrumentos Empleados

Análisis Documental.- Permitió la búsqueda, análisis, e interpretación de la información registrada por otros investigadores en revistas científicas : impresas y electrónicas.	Fichas textuales y de resumen.
Método Deductivo.	Demostración.

3.4. Procedimiento de la Recolección de Datos

Técnicas lógicas: Inducción, Deducción, Análisis y Síntesis.

IV. DESARROLLO DEL ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Problema.

¿Existe y es única la solución de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico de la forma:

$$-\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \qquad en \quad \Omega \quad \ldots(1)$$

$$u/_{\partial\Omega} = g$$

Donde: Ω es una región plana convexa.

Equivalente a:
$$\begin{aligned} Au &= f \quad \ldots(2) \\ u/_{\partial\Omega} &= g \end{aligned}$$

Teorema.- Sea V un espacio de Banach reflexivo separable y $A:V\to V'$, talque:

i. A es acotado y $\lambda\in\mathbb{R}\to\langle A(u+\lambda v), w\rangle\in\mathbb{R}$ es continua.

   Es decir: $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_o}\langle A(u+\lambda v), w\rangle = \langle A(u+\lambda_o v), w\rangle$.

ii. A es monótono, es decir $\langle Au-Av, u-v\rangle \geq 0, \forall u, v\in V$

iii. $\dfrac{\langle Au,u\rangle}{\| u\|}\to\infty$; $\| u\|\to\infty$, coercividad del operador.

Entonces $A:V\to V'$ es sobreyectivo.

Es decir $\forall f\in V'$ existe $u\in V$ / $Au = f$

Prueba de la unicidad:

Consideremos dos soluciones diferentes $u,v\in V$

Esto es:
$$\begin{aligned} Au &= f \quad ; \quad u/_{\partial\Omega} = g \\ Av &= f \quad ; \quad v/_{\partial\Omega} = g \end{aligned}$$

Donde $Au = -\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$

Reemplazando $\langle Au-Av\,,u-v\rangle=\left\langle -\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\frac{\partial v}{\partial x_i}\right),u-v\right\rangle$

$$=\sum_{i=1}^{2}\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i}\left[-\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\frac{\partial u}{\partial x_i}+\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\frac{\partial v}{\partial x_i}\right],u-v\right\rangle=\sum_{i=1}^{2}\left\langle\left[\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\frac{\partial u}{\partial x_i}-\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\frac{\partial v}{\partial x_i}\right],\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\right\rangle\geq 0$$

$u\in W^{1,4}(\Omega)\quad\rightarrow\quad V=W^{1,4}(\Omega)$.

Por otro lado:

$\langle Av-f,v-u\rangle=\langle Au-f,v-u\rangle+\langle Av-Au,v-u\rangle$

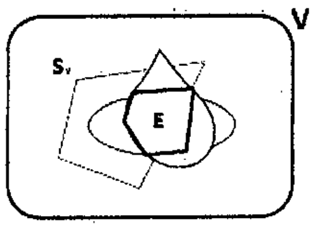
$\qquad\qquad=\langle Av-Au,v-u\rangle\geq 0$, *por ser monótona.*

$\Rightarrow\langle Av-f\,,v-u\rangle\geq 0\,,\forall v\in V$

Construyamos:

$\forall v\in V$, $S_v=\{u\in V/\langle Av-f,v-u\rangle\geq 0,\ Au=f\}$ subespacio cerrado de V.

$\Rightarrow\ E=\bigcap_{v\in V}S_v$



E es cerrado y convexo, además $E=\{u\in V/\ Au=f\}$, conjunto de las soluciones de (2).

Suponga que la norma en V, $\|.\|:V\rightarrow\mathbb{R}$ es estrictamente convexa sobre la esfera unitaria de V, y $\|Au\|=\|Av\|\Rightarrow\|u\|=\|v\|$ como u satisface (2).

$E\subset\{u\in V/\|u\|=S\ ,\ Au=f\}$, S Convenientemente.

Se deduce que E se reduce a un conjunto unitario.

Prueba de la existencia:

Si $f \in W^{-1,4/3}(\Omega), g \in W^{3/4,4}(\partial\Omega)$ entonces existe una única $u \in W_o^{1,4}(\Omega)$ tal que:

$$(3)\quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f \\ u/_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

Demostración: Sea $\varphi \in W_o^{1,4}(\Omega), tal\ que\ \varphi/_{\partial\Omega} = g$

Consideremos $\psi = u - \varphi$, consecuentemente (3) es equivalente a resolver:

$$(4)\quad \left\{ -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial x_i} \right|^2 \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial x_i} \right) = f \right. ,\ \text{para}\quad \psi \in W_o^{1,4}(\Omega)$$

Es decir resolver el problema de Dirichlet homogéneo de la forma:

$$(5)\quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) = f \\ v/_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Para finalmente hacer: $u = v + \varphi$

Sea $w_1, w_2, \ldots, w_m, \ldots$ una base de $W_o^{1,4}(\Omega)$ considere el problema aproximado

para $v_m \in [w_1, w_2, \ldots, w_m]$, donde $\left\langle -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^2 \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right), w_j \right\rangle = \langle f, w_j \rangle,\ 1 \le j \le m$

$\sum_{i=1}^{2} \left\langle \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^2 \frac{\partial v_m}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right\rangle = \langle f, w_j \rangle,\ 1 \le j \le m$, derivada distribucional.

Para $\quad v_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2} \left\langle \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^2 \frac{\partial v_m}{\partial x_i}, \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right\rangle = \langle f, v_m \rangle$$

$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^4 dx = \int_{\Omega} f v_m dx \le \|f\|_{V'} \|v_m\|_V$, desigualdad de Hölder

Donde $V = W_o^{1,4}(\Omega)$ y $V' = W^{-1,4/3}(\Omega)$

Como $\| v_m \|_V^4 \leq \alpha \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^4 dx$, desigualdad de Poincaré $\Rightarrow \| v_m \|_V \leq C$

Por otro lado para $\varphi \in W_o^{1,4}(\Omega)$.

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^2 \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \leq \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^3 . \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| dx$$

$$\leq \sum_{i=1}^{2} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^4 dx \right)^{3/4} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^4 dx \right)^{1/4}$$, desigualdad de Hölder

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^4 dx \right)^{3/4} \left(\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^4 dx \right)^{1/4} = \| v_m \|_V^3 \| \varphi \|_V$$

Donde:

$$\Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|^2 \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right) \right|_{V'} \leq \| v_m \|_V^3 \leq C^3$$, acotada (C:constante)

Dado que V es un espacio reflexivo, existe una subsucesión (v_r) de (v_m), tal que: $v_r \to u$ débil en $W_o^{1,4}(\Omega)$

$$-\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right|^2 \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right) \to \gamma \text{ débil en } W^{-1,4/3}(\Omega)$$

Pasando el límite cuando $r \to \infty$ en el problema aproximado se deduce de :

$$\left\langle -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right|^2 \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right), w_j \right\rangle = \langle f, w_j \rangle$$

$$\langle \gamma, w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle, \forall j$$

$$\Rightarrow \gamma = f \quad .... (*)$$

Además de:

$$\left\langle -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right|^2 \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right), v_r \right\rangle = \langle f, v_r \rangle$$

Cuando $r \to \infty$ se tiene:

$$\left\langle -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v_r}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial v_r}{\partial x_i}\right), v_r \right\rangle \to \langle f, u\rangle = \langle \gamma, u\rangle$$

Por otro lado: $\langle Av_r - A\varphi \,, v_r - \varphi\rangle \geq 0 \;\; , \forall \varphi \in V$

$$\left\langle -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v_r}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial v_r}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), v_r - \varphi \right\rangle \geq 0$$

Luego cuando $r \to \infty$

$$\left\langle \gamma + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), u - \varphi \right\rangle \geq 0 \,, \forall \varphi \in V \qquad \ldots\ldots.(6)$$

Sea $\varphi = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in V$, reemplazando en (6)

$$\lambda \left\langle \gamma + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial (u - \lambda w)}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial (u - \lambda w)}{\partial x_i}\right) \,,\; w \right\rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \left\langle \gamma + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial (u - \lambda w)}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial (u - \lambda w)}{\partial x_i}\right) \,,\; w \right\rangle \geq 0$$

Pasando el límite cuando $\lambda \to 0$

$$\Rightarrow \left\langle \gamma + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \,,\; w \right\rangle \geq 0 \,, \forall w \in V$$

$$\Rightarrow \gamma = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots.(^{**})$$

De (*) y (**):

$$\Rightarrow -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f$$

V. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

5.1. Conclusiones

5.1.1. La existencia de la solución de la ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial y}\right)=-f \quad \text{en} \quad \Omega$$

Es posible para $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ dentro de los Espacios de Sobolev, es decir el operador diferencial admite una base en el espacio $H_0^1(\Omega)$.

5.1.2. En la unicidad de solución de la ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo elíptico:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial y}\right)=-f \quad \text{en} \quad \Omega$$

La condición de $\langle Au-Av, u-v\rangle \geq o\,, \forall u\, v \in V, u \neq v$, fue necesaria para que el conjunto de las soluciones de $Au=f$, sea cerrado y convexo.

El Conjunto E de las soluciones es cerrado y la condición de norma estrictamente convexa permitió demostrar que el conjunto E se reduce a un conjunto unitario, es decir la solución es única.

5.2. Sugerencias

5.2.1. Realizar futuras investigaciones sobre existencia y solución de ecuaciones diferenciales parciales no lineales en los Espacios de Sobolev con peso.

5.2.2. Extender el uso de la derivada débil en la solución de otros modelos de Ecuaciones Diferenciales Parciales en las que tienen condiciones de frontera más generales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1]. Adams, R(1975). Sobolev Spaces. Academic. Press.

[2]. Alonso, J(1993). Solución de Problemas Singulares en Ecuaciones Elípticas y Elasticidad.

[3]. Climent, B(1995). Soluciones Débiles y Renormalizadas de algunas Ecuaciones en Derivadas Parciales no Lineales con Origen en Mecánica de Fluidos.

[4]. Doubova A(1999). Análisis y Control De Algunas EDP no Lineales con Origen en Mecánica.

[5]. Espinoza, P(1989). Elementos finitos, Séptimo coloquio, Ica.

[6]. Fernández, L(1995). Control Óptimo de Sistemas gobernados por Ecuaciones Elípticas Cuasilineales.

[7]. Garrido J(2001). Algunos Resultados de Existencia, Unicidad y estabilidad para EDP Funcionales Estocásticas no Lineales.

[8]. Gamez , J(1998). Sistemas Elípticos no Lineales y Aplicaciones en Dinámica de Poblaciones.

[9]. Gómez , M(1997). Estudio Matemático de algunos problemas no Lineales de la Mecánica de Fluidos Incompresibles.

[10]. Gonzalez , M(1995). Dos problemas relacionados con Ecuaciones Diferenciales Parciales de Evolución no Lineales.

[11]. Ortiz, A(1972). Operadores Integrales Singulares. UNT.

[12]. Rainardy, M. Roger(1999). Partial diferential equation. Springer Verlag.

[13] Ríbnikov, K. A. (1987) *Historia de las matemáticas*. Ed. Mir. Moscú

[14]. Rivera, P(1978). Métodos de Espacios de Hilbert en Ecuaciones Diferenciales Parciales. IV Escuela Latina de Matemática, Lima.

[15]. Robles, R(1995). Contribución al Estudio Teórico de algunas Ecuaciones En Derivadas Parciales no Lineales relacionadas con Fluidos no Newtonianos.

[16]. Suarez, A(1998). Propiedades de las Soluciones de Sistemas Estacionarios de la Dinámica de Poblaciones con Difusión Lineal y no Lineal.

[17].Zienkiewics, C, y Taylor, R(1991). The finite Element Method, 4.Ed. Mc Graw Hill, VolI, 1989,vol II.

APENDICE

APENDICE A

ESPACIOS VECTORIALES

Definición A.1. Dados un conjunto $V \neq \phi$, un cuerpo K ($\mathbb{R}\, o\, \mathbb{C}$), $+: VxV \to V$, y $*: KxV \to V$. $(V,+,*$ es llamado un espacio vectorial sobre K, si se verifican las siguientes propiedades: $\forall u,v,w \in V$; $\forall \alpha,\beta \in K$

i. $u+v \in V$.

ii. $u+v=v+u$.

iii. $(u+v)+w=u+(v+w)$.

iv. $\exists!\, 0 \in V$, talque $u+0=u$.

v. $\exists!\, -u \in V$, talque $u+(-u)=0$.

vi. $\alpha u \in V$.

vii. $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$.

viii. $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$.

ix. $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$.

x. $1u=u$.

Ejemplo 1.

$F=\{f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f\ \mathit{continua}\}$: Conjunto de funciones continuas en $[0,1]$.

Ejemplo 2.

$\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n): x_i \in \mathbb{R}\}$: Conjunto de arreglos de n-dimensiones.

Ejemplo 3.

$M_{mxn}(\mathbb{R})$: Conjunto de matrices de orden mxn.

Ejemplo 4.

$S=\left\{(x_n)_{n=1}^{\infty}: x_n \in \mathbb{R}\right\}$: Conjunto de sucesiones de números reales.

Ejemplo 5.

$\mathcal{D}(\Omega)$ = Espacio de Funciones de Prueba con soporte compacto, junto a las operaciones de adición y multiplicación escalar de funciones.

$u \in \mathcal{D}(\Omega)$ si:

i. $u \in C^{\infty}(\Omega)$, u es infinitamente diferenciable, con derivadas continuas de todos los órdenes sobre Ω.

ii. $spp(u) \subset K$, K compacto.

A.1. Subespacio Vectorial

Definición A.1.1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K, $W \subset V$ no vacío.

W es un subespacio vectorial sobre K, si se cumple:

i. $u+v \in W$, $\forall u,v \in W$

ii. $\alpha u \in W$, $\forall u \in W$, $\forall \alpha \in K$

A.2. Subespacio Vectorial Generado

Definición A.2.1. Si $S=\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ es un conjunto de vectores de un espacio vectorial V.

$[S]=\{\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\dots \alpha_n v_n \,/\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n \in K\}$

Es un llamado subespacio vectorial generado por S.

A.3. Conjunto convexo

Definición A.3.1. Un subconjunto M de un espacio vectorial V, es llamado conjunto convexo si $\forall x,y \in M, \forall \lambda \in \langle 0,1 \rangle$, se cumple que $\lambda x+(1-\lambda)y \in M$.

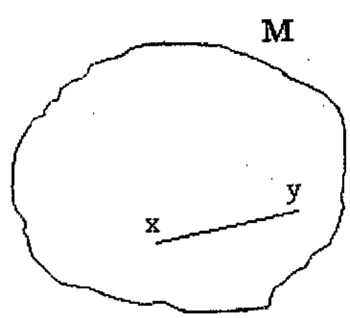


Figura A.1: Conjunto convexo.

A.4. Transformaciones lineales

Definición A.4.1. Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo campo K y $T: V \to W$ una función, T es llamada una transformación lineal, si cumple con las siguientes propiedades: $\forall u, v \in V;\ \ \forall \alpha \in K$

I. $T(u+v) = T(u) + T(v)$.

II. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Ejemplo 6.

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$T(x, y) = (y, x)$$

APENDICE B

ESPACIO CON PRODUCTO INTERNO

Definición B.1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Una aplicación $\langle\,,\rangle : V x V \to K$, es llamado producto interno, si cumple las siguientes propiedades: $\forall u,v,w \in V$; $\forall \alpha,\beta \in K$

i. $\langle u, u\rangle \geq 0$, y $\langle u, u\rangle = 0$ si y solo si $u = 0$.

ii. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, (para $K=\mathbb{C}$, $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$).

iii. $\langle \alpha u+\beta v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle$

$(V,\langle\,,\rangle)$ es llamado espacio con producto interno o espacio pre-Hilbert.

Ejemplo 1.

$F=\{f:[\,0,1\,]\to\mathbb{R},\ f\ continua\}$: Conjunto de funciones continuas en $[\,0,1\,]$.

Se define $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Ejemplo 2.

$\mathbb{R}^n = \{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$: Conjunto de arreglos de n-dimensiones.

Se define $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n$.

B.1. Funcionales lineales

Definición B.1.1. Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre un cuerpo K, una transformación lineal $T: V \to K$, es llamada funcional lineal.

Es decir una funcional lineal es una transformación lineal de un espacio vectorial con producto interno V sobre el cuerpo K en el que está construido.

Ejemplo 3. Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre un cuerpo K, $v_o \in V$, una función $f_{v_o} : V \to K$, definida como: $f_{v_o}(v) = \langle v, v_o\rangle$, $\forall v \in V$, es una funcional lineal, llamada funcional multiplicación escalar por v_o.

Demostración: $\forall u, v \in V; \quad \forall \alpha \in K$

i. $f_{v_o}(u+v) = \langle u+v, v_o \rangle$

$$= \langle u, v_o \rangle + \langle v, v_o \rangle$$

$$= f_{v_o}(u) + f_{v_o}(v)$$

ii. $f_{v_o}(\alpha u) = \langle \alpha u, v_o \rangle$

$$= \alpha \langle u, v_o \rangle$$

$$= \alpha f_{v_o}(u)$$

De i) y ii) se tiene que f_{v_o} es una transformación lineal.

De donde se concluye que f_{v_o} es una funcional lineal.

Lema B.1.1. Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre un cuerpo K. Si $\langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle, \quad \forall v \in V$, entonces $w_1 = w_2$.

Demostración:

Por hipótesis tenemos $\langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle, \quad \forall v \in V$,

Luego $\langle v, w_1 \rangle - \langle v, w_2 \rangle = 0$

$$\langle v, w_1 - w_2 \rangle = 0$$

Como la igualdad anterior se verifica $\forall v \in V$

Haciendo $v = w_1 - w_2$, tenemos:

$$\langle w_1 - w_2, w_1 - w_2 \rangle = 0$$

$w_1 - w_2 = 0$, propiedad de producto interno.

$$w_1 = w_2.$$

B.2. Representación de Riesz

Teorema(**Teorema de Representación de Riesz**) B.2.1. Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre un cuerpo K de dimensión finita.

Si T es un funcional lineal sobre V, entonces existe un único $w_o \in V$ tal que

$T(v) = \langle v, w_o \rangle, \quad \forall v \in V$.

El vector w_o, es llamado representante de Riesz del funcional T.

Demostración:

Unicidad.- Sean $w_1, w_2 \in V$ tales que $T(v) = \langle v, w_1 \rangle$ y $T(v) = \langle v, w_2 \rangle$

De donde se tiene que: $\langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle, \quad \forall v \in V$, por el lema anterior

Tenemos $w_1 = w_2$, es decir que el representante de Riesz es único.

Existencia.- Ahora debemos hallar $w_o \in V$

Tal que $T(v) = \langle v, w_o \rangle, \quad \forall v \in V$

Es decir $T(v) = f_{w_o}(v), \quad \forall v \in V$

Sera suficiente determinar las coordenadas de w_o

Consideremos la representación de w_o en una base ortonormal

$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V

$w_o = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$

Multiplicando en forma escalar se obtiene:

$$\langle w_o, e_1 \rangle = a_1$$

$$\langle w_o, e_2 \rangle = a_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\langle w_o, e_n \rangle = a_n$$

Por otro lado:

$T(v) = \langle v, w_o \rangle$

$$T(v) = \langle v, a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n \rangle$$

$$= a_1 \langle v, e_1 \rangle + a_2 \langle v, e_2 \rangle + \ldots + a_n \langle v, e_n \rangle$$

En particular $v = e_i$

$T(e_i) = a_i$, $\forall i = 1..n$

Luego: $T(e_i) = \langle w_o, e_i \rangle$, $\forall i = 1..n$, son las coordenadas de w_o .

Esto es: $w_o = T(e_1)e_1 + T(e_2)e_2 + \ldots + T(e_n)e_n$.

APENDICE C

ESPACIO NORMADO

Definición C1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Una aplicación $\|,\|: V x V \to K$, es llamada una norma, si cumple las siguientes propiedades: $\forall u, v \in V$; $\forall \alpha \in K$

i. $\|u\| \geq 0$, y $\|u\| = 0$ si y solo si $u = 0$.

ii. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$.

iii. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Desigualdad triangular.

$(V, \| \, , \|)$ es llamado espacio normado.

Observación.- En un espacio con producto interno, se puede definir una norma de la siguiente forma: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$

Ejemplo 1.

En $V = \mathbb{R}^n$, se definen las siguientes normas:

i. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

ii. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$.

iii. $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} = \max \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$.

C.1. Normas equivalentes

Definición C.1.1. Sea V un espacio vectorial, $\| \cdot \|_1$ y $\| \cdot \|_2$ dos normas en el espacio V. Se dice que $\| \cdot \|_1$ es equivalente a $\| \cdot \|_2$ si existe una constante $k \succ 0$ talque $\| \cdot \|_1 \leq k \| \cdot \|_2$.

C.2. La Norma en el Espacio de Transformaciones Lineales

Definición C.2.1. Sean U y V dos espacios normados sobre el mismo cuerpo de escalares. En el espacio vectorial.

$$L(U,V)=\{T:U\to V\ /\ T\ \textit{es una transformación lineal continua}\},$$

se define

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|T(x)\|.$$

C.3. Punto adherente

Definición C.3.1. Sea V un espacio normado, $W\subset V$, y $a\in V$.

"a" es llamado punto de adherencia del conjunto W, si $B(a,\varepsilon)=\{x\in V:\|x-a\|\prec\varepsilon\}$ $\forall\varepsilon\succ 0$, contiene al menos un elemento de W.

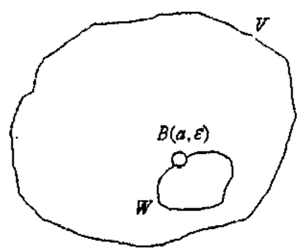


Figura C.1: Vecindad del punto a.

$\overline{W}$ es llamado conjunto de puntos de adherencia de W.

C.4. Sucesiones de Cauchy

Definición C.4.1. Sea V un espacio normado, una sucesión $(v_n)_{n\geq 1}$ de elementos de V es llamada sucesión de Cauchy, si $\forall\in\succ 0,\exists N_o\in\mathbb{N}$ talque $|v_m-v_n|\prec\in$ siempre que $m,n\succ N_o$.

Ejemplo: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.

Definición C.4.2. Un espacio normado V, se denomina completo si toda sucesión de Cauchy $(v_n)_{n\geq 1}$, $v_i \in V$ converge en V.

C.5. Espacios de Banach

Definición C.5.1. Un espacio normado completo V, se denomina espacio de Banach.

C.6. Espacio Dual

Definición C.6.1. Sea V un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{R}$, se llama espacio dual de V, y se denota por V', al conjunto definido por:

$$V' = \{\, T : V \to \mathbb{R} \,/\, T \text{ es una funcional continua}\}$$

$$\|T\| = \sup_{\|v\|=1} |T(v)| \quad , \quad v \in V$$

El segundo dual de V es el espacio denotado por V'', dotado de la norma

$$\|\theta\| = \sup_{\|T\|=1} |\theta(T)| \quad , \quad T \in V'$$

C.7. Funcional Coercitivo

Definición C.7.1. Sea V un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{R}$, un operador $T : V \to \mathbb{R}$ se dice que es coercitivo, si $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} T(u) = \infty$

Ejemplo 1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, T(x,y) = x^2 + y^2$

$$\lim_{\|\bar{x}\|\to\infty} T(x,y) = \lim_{\|\bar{x}\|\to\infty} x^2 + y^2 = \lim_{\|\bar{x}\|\to\infty} \|\bar{x}\| = \infty$$

Equivalentemente

El operador $T : V \to V'$ es coercitivo, si $\dfrac{\langle Tu, u\rangle}{\| u \|} \to \infty \quad ; \quad \| u \| \to \infty$

C.8. Operador Monótono

Definición C.8.1. Sea V un espacio de Banach, V' su espacio dual, un operador $A : V \to V'$ es llamado operador monótono si $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0$, $\forall u\ v \in V$.

C.9. Espacios Reflexivos

Definición C.9.1. Un espacio de Banach V es reflexivo si solo si toda sucesión acotada tiene una subsucesión débilmente convergente.

C.10. Espacios Separables

Definición C.10.1. Un espacio de Banach V, se denomina separable, si contiene un subconjunto denso numerable.

Ejemplo: $(\mathbb{R}, |.|)$ es un espacio separable, ya que el conjunto $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso numerable.

C.11. Norma estrictamente convexa

Definición C.11.1. Se dice que una norma $\| . \|$ en un espacio de Banach V es estrictamente convexa, si la condición $\| u \| = \| v \| = \frac{1}{2} \| u + v \|$, implica $u = v$.

Geométricamente esta definición equivale a decir que la esfera unitaria del espacio V, no contiene segmentos rectilíneos.

Ejemplo 1. $(\mathbb{R}^n, \| x \|)$.

C.12. Espacios de Hilbert

Definición C.12.1. Un espacio producto con interno completo V, se denomina espacio de Hilbert.

C.13. Funcional lineal continua

Definición C.13.1. Sea V un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$. Una funcional lineal $T : V \to \mathbb{R}$, es llamado continua, si $|T(v)| \leq \|T\| \|v\|$, $\forall v \in V$, donde $\|T\| = \sup\limits_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{T(v)}{\|v\|}$.

C.14. Convergencia débil

Definición C.14.1. Una sucesión $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ en un espacio de Hilbert H, se dice que converge débilmente a $h \in H$ si solo si $\langle h_j, g \rangle \to \langle h, g \rangle$, $\forall g \in H$.

Equivalentemente

Una sucesión $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ en un espacio de Banach V, se dice que converge débilmente a $v \in V$ si solo si $\varphi(v_j) \to \varphi(v)$, $\forall \varphi \in V'$.

C.15. Funcional bilineal

Definición C.15.1. Sea V un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación $\beta : VxV \to \mathbb{R}$, es llamada funcional bilineal, si es lineal en cada coordenada.

Es decir. $\beta(\alpha u + v, w) = \alpha\beta(u, w) + \beta(v, w)$.

$$\beta(u, \alpha v + w) = \alpha\beta(u, v) + \beta(u, w).$$

C.16. Funcional bilineal continua

Definición C.16.1. Sea V un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$. Un funcional bilineal $\beta : VxV \to \mathbb{R}$, es continuo, si existe $M \geq 0$ tal que $\beta(u, v) \leq M \| u \| \| v \|$, $\forall u, v \in V$.

C.17. Funcional bilineal V- Elíptica

Definición C.17.1. .- Sea V un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$. Una funcional bilineal $\beta : VxV \to \mathbb{R}$, es llamada V-Elíptica, si existe $\alpha \succ 0$ tal que $\beta(v,v) \geq \alpha \| v \|^2, \forall v \in V.$

C.18. Teorema de Lax - Milgram

Sea V un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, $\beta : VxV \to \mathbb{R}$, un funcional bilineal continuo y V-Elíptica. $L : V \to \mathbb{R}$ un funcional continuo.

$L(v) = \beta(u,v), \forall v \in V$, u existe y es única.

C.19. Diferencial

Definición C.19.1. Sean V y W espacios de Hilbert, A un subconjunto abierto de V, decimos que una aplicación $f : A \to W$ es diferenciable en $a \in A$, si existe una aplicación lineal y continua $Df(a) : V \to W$ talque se verifica:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - Df(a).(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

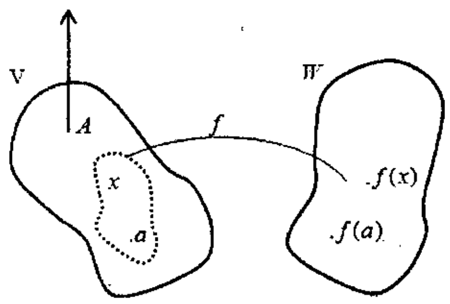


Figura C.2: Diferencial de una función.

Nota. Si $V = \mathbb{R}^n$ y $W = \mathbb{R}^m$, $Df(a)$ es la matriz jacobiana de orden mxn.

C.20. Derivada direccional

Definición C.20.1. Sea V un espacio de Hilbert, $J:V\rightarrow K$ una funcional continua. La derivada direccional de J en el punto $a\in V$ en la dirección de $v\in V$ se define como:

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{J(a+\lambda v)-J(a)}{\lambda}$$

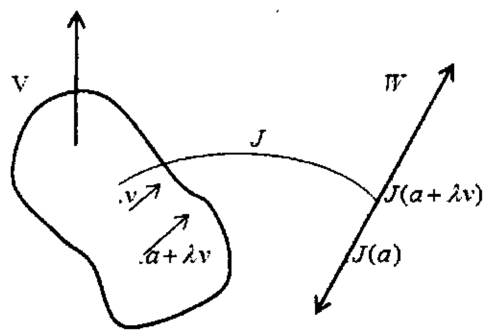


Figura C.3: Derivada direccional.

APENDICE D

TEORIA DE LA MEDIDA

Definición(σ - Álgebra) D.1. Una colección M de subconjuntos de un conjunto X se dice que es una σ- álgebra sobre el conjunto X, si verifica las siguientes propiedades:

i. $\Phi \in M$

ii. Si $A \in M \rightarrow A^c \in M$

iii. $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in M \quad , \quad A_i \in M, i = 1,2,...$

D.1. Conjunto Medible

Definición D.1.1. Todo elemento A de una σ- álgebra M en X, es llamado conjunto medible en X.

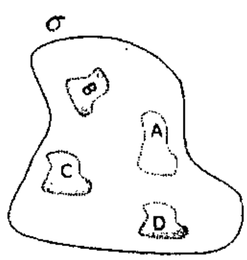


Figura D.1: Conjunto medible.

D.2. Medida

Definición D.2.1. Sea M una σ- álgebra sobre un conjunto X, una función $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}_o^+$ es llamada una medida, si verifica las siguientes propiedades:

i. $\mu(A) \geq 0$, $\forall A \in M$.

ii. $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad , \quad A_i \cap A_j = \phi \quad , \quad \forall i \neq j.$

(X, σ, μ) es llamado un espacio de medida.

Definición D.2.2. Sea X un espacio de medida. Se dice que φ es una función escalar, si existe una colección finita de conjuntos medibles y disjuntos $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ y de números reales $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$ talque:

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_i, & x \in A_i \\ 0, & x \notin A_1 \cup ... \cup A_n \end{cases}$$

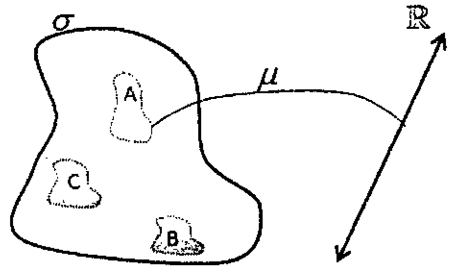


Figura D.2: Función escalar.

APENDICE E

ESPACIO $L^2(\Omega)$

Definición E.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, una función $u:\Omega \to \mathbb{R}$ es llamada medible si existe (u_n) de funciones escalares talque $u_n \to u$ a.e.

$$u_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$$

$L^2(\Omega) = \left\{ u:\Omega \to \mathbb{R},\ u\ medible, \int_\Omega |u(x)|^2\, dx \prec \infty \right\}$ Conjunto de funciones medibles.

Los elementos de $L^2(\Omega)$ son clases de funciones medibles. Dos funciones son equivalentes si ellas son iguales en casi todos los valores Ω.

$L^2(\Omega)$ es un espacio vectorial, llamado espacio de funciones medibles de cuadrado integrable sobre Ω.

$L^2(\Omega)$ es un espacio con producto interno, definido por: $\langle u, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx$

$L^2(\Omega)$ es un espacio normado, con la norma: $\| u \| = (\int_\Omega |u(x)|^2\, dx)^{1/2}$

$L^2(\Omega)$ es un espacio de Banach.

$L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

E.1. Espacio $L^p(\Omega)$

$L^p(\Omega)=\left\{u:\Omega\rightarrow\mathbb{R},\ u\ medible, \int_\Omega |u(x)|^p\,dx \prec \infty\right\}$ Conjunto de funciones medibles.

$L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial, llamado espacio de funciones medibles p - integrable sobre Ω.

$L^p(\Omega)$ es un espacio normado, con la norma: $\|u\| = (\int_\Omega |u(x)|^p\,dx)^{1/p}$

$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach.

E.2. Desigualdad de Young

Teorema E.2.1. Sean $a,b\succ 0$ y $1\prec p\prec\infty$, entonces $ab\leq\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$, donde $p\ y\ q$ conjugados , $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Demostración:

Consideremos $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\ /\ f(x)=e^x$, función convexa.

$$ab=e^{\log(ab)}=e^{\log(a)+\log(b)}=e^{\frac{1}{p}\log(a^p)+\frac{1}{q}\log(b^q)}\leq\frac{1}{p}e^{\log(a^p)}+\frac{1}{q}e^{\log(b^q)}=\frac{a^p}{p}+\frac{a^q}{q}$$

E.3. Desigualdad de Hölder

Teorema E.3.1. Sean $f\in L^p(\Omega)$ y $g\in L^q(\Omega)$ con $1\leq p\leq\infty$, $p\ y\ q$ conjugados entonces $f\,g\in L^1(\Omega)$ y $\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}\ (\int_\Omega |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}$

Demostración:

Por homogeneidad podemos asumir que $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, entonces por la desigualdad de Young

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |f(x)|^p dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |g(x)|^q dx = 1 = \|f\|_p \; \|g\|_q$$