

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA**  
**ESCUELA DE POSGRADO**  
**Programa de Doctorado en Matemática**



**UNS**  
**ESCUELA DE**  
**POSGRADO**

---

---

**“Modelo de proyección poblacional con series de  
tiempo difusas”**

---

---

**Tesis para optar el grado académico de  
Doctor en Matemática**

**Autora:**

**Mg. Cabello Blanco, Jaqueline Jessica**

**Asesor:**

**Dr. Morales Marchena, Herón Juan**  
**Código ORCID: 0000-0002-5394-0958**  
**DNI. N° 32837715**

**Línea de Investigación**  
**Modelado Matemático de Fenómenos Naturales,**  
**Sociales y de Procesos Industriales**

**Nuevo Chimbote - PERÚ**  
**2024**



## CERTIFICACIÓN DE ASESORAMIENTO DE TESIS

Yo, **Herón Juan, Morales Marchena**, mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis Doctoral titulada: **Modelo de proyección poblacional con series de tiempo difusas**, elaborada por la magister **Cabello Blanco, Jaqueline Jessica** para obtener el Grado Académico de **Doctor en Matemática** en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, febrero del 2024

.....  
**Dr. Morales Marchena. Herón Juan**  
ASESOR  
CODIGO ORCID: 0000-0002-5394-0958  
DNI N° 32837715



**UNS**  
ESCUELA DE  
POSGRADO

**CONFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR**

**Modelo de proyección poblacional con series de tiempo difusas**

**Tesis para optar el Grado de Doctor en Matemática**

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:

.....  
**Dr. Ernesto Antonio Cedrón León**

PRESIDENTE

CODIGO ORCID 0000-0002-3198-831X

DNI N° 32966495

.....  
**Dr. Fidel Alejandro Vera Obeso**

SECRETARIO

CODIGO ORCID 0000-0002-9125-0464

DNI N° 32857547

.....  
**Dr. Herón Juan Morales Marchena**

VOCAL

CODIGO ORCID 0000-0002-5394-0958

DNI N° 32837715



**UNS**  
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA  
ESCUELA DE  
POSGRADO

### ACTA DE EVALUACIÓN DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

A los veintitrés días del mes de febrero del año 2024, siendo las 17:00 horas, en el aula P-01 de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador, designados mediante Resolución Directoral N° 006-2024-EPG-UNS de fecha 16.01.2024, conformado por los docentes: Dr. Ernesto Antonio Cedrón León (Presidente), Dr. Fidel Alejandro Vera Obeso (Secretario) y Dr. Herón Juan Morales Marchena (Vocal); con la finalidad de evaluar la tesis titulada **"MODELO DE PROYECCIÓN POBLACIONAL CON SERIES DE TIEMPO DIFUSAS"** presentado por la tesisista **Jaqueline Jessica Cabello Blanco**, egresada del programa de Doctorado en **Matemática**.

Sustentación autorizada mediante Resolución Directoral N° 062-2024-EPG-UNS de fecha 19 de febrero de 2024.

El presidente del jurado autorizó el inicio del acto académico; producido y concluido el acto de sustentación de tesis, los miembros del jurado procedieron a la evaluación respectiva, haciendo una serie de preguntas y recomendaciones al tesisista, quien dio respuestas a las interrogantes y observaciones.

El jurado después de deliberar sobre aspectos relacionados con el trabajo, contenido y sustentación del mismo y con las sugerencias pertinentes, declara la sustentación como A P T E A D O a su vez le otorga la calificación de Distintivo.

Siendo las 13:00 horas del mismo día se da por finalizado el acto académico, firmando la presente acta en señal de conformidad.

  
Dr. Ernesto Antonio Cedrón León  
Presidente

  
Dr. Fidel Alejandro Vera Obeso  
Secretario

  
Dr. Herón Juan Morales Marchena  
Vocal

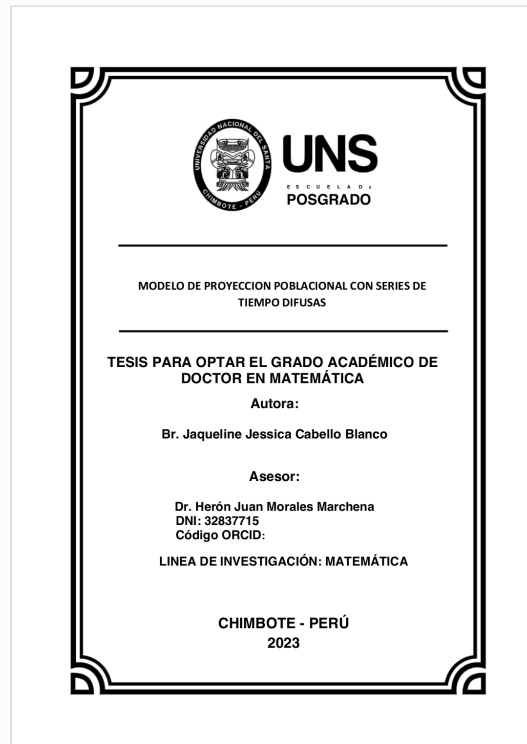


## Digital Receipt

This receipt acknowledges that **Turnitin** received your paper. Below you will find the receipt information regarding your submission.

The first page of your submissions is displayed below.

Submission author: Heron Morales  
Assignment title: Informe Doctorado  
Submission title: Tesis Jaqueline Cabello  
File name: TESIS\_PARA\_EL\_SANTA\_DICIEMBRE\_2023.pdf  
File size: 1.07M  
Page count: 66  
Word count: 12,284  
Character count: 63,712  
Submission date: 01-Jan-2024 11:36AM (UTC-0500)  
Submission ID: 2265992115



# Tesis Jaqueline Cabello

---

## INFORME DE ORIGINALIDAD

---

12%

INDICE DE SIMILITUD

10%

FUENTES DE INTERNET

2%

PUBLICACIONES

5%

TRABAJOS DEL  
ESTUDIANTE

---

## FUENTES PRIMARIAS

---

1	<a href="http://www.scielo.org.mx">www.scielo.org.mx</a> Fuente de Internet	3%
2	<a href="http://repositorio.unp.edu.pe">repositorio.unp.edu.pe</a> Fuente de Internet	2%
3	<a href="http://enfoqueontosemiotico.ugr.es">enfoqueontosemiotico.ugr.es</a> Fuente de Internet	1%
4	Submitted to Universidad Internacional de la Rioja Trabajo del estudiante	1%
5	Submitted to Universidad Nacional Jose Faustino Sanchez Carrion Trabajo del estudiante	1%
6	<a href="http://eprints.uanl.mx">eprints.uanl.mx</a> Fuente de Internet	1%
7	<a href="http://www.aeca1.org">www.aeca1.org</a> Fuente de Internet	1%
8	Submitted to FUNIBER Trabajo del estudiante	1%

---

*Conoces lo que conoces y sabes lo que sabes. Por eso te invito a que te adentres en aquello que desconoces, en lo que no sabes que no sabes y en lo que tampoco sabes que sabes.*

*Mario Alonso Puig*

## **AGRADECIMIENTO**

A Sebastián, mi hijo por alentarme y apoyarme a descubrir y, a aprender lo que no sé. A mi familia, por estar juntos en este camino de la vida. A la memoria de mis abuelos Venancio Blanco y Matilde Yauri, ambos me dieron el cimiento para adquirir conocimiento espiritual y material. A mi jurado evaluador Dr. Ernesto Cedrón, Dr. Fidel Vera y asesor Dr. Herón Morales por sus observaciones, sugerencias y apoyo incondicional en la culminación de esta tesis, mi especial gratitud a todos mis estudiantes por ser la razón de mi trascendencia.



## Índice

Certificación del Asesor de tesis.....	ii
Aval del los Jurado.....	iii
Índice general.....	vii
<b>CAPÍTULO I : PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN</b>	
1.1. Planteamiento y fundamentación del problema de investigación .....	16
1.1.1. Descripción de la realidad problemática.....	16
1.1.2. Formulación del problema .....	17
1.1.2.1. Problema general .....	17
1.1.2.2. Problema específico .....	17
1.2. Antecedentes de la investigación.....	17
1.3. Delimitación del estudio.....	19
1.4. Justificación e importancia de la investigación .....	20
1.5. Objetivos de la investigación.....	20
1.5.1. Objetivo general.....	20
1.5.2. Objetivo específico .....	20
<b>CAPÍTULO II: MARCO TEORICO</b>	
2.1. Fundamentos teóricos de la investigación.....	22
2.1.1. Proyección poblacional.....	22
2.1.2. Importancia y papel de las proyecciones de población.....	22
2.1.3. Clasificación de las proyecciones de población.....	23
2.1.4. Métodos generales para la elaboración de proyecciones de la población.....	24
2.1.5. Azar e incertidumbre.....	25
2.1.6. Intervalos de confianza .....	26
2.1.7. Números difusos .....	30
2.1.8. Conjuntos difusos.....	34
2.2. Marco conceptual .....	37
2.2.1. Definiciones .....	37
<b>CAPÍTULO III: MARCO METODOLÓGICO</b>	
3.1. Hipótesis central de la investigación.....	42
3.1.1. Hipótesis general.....	42
3.1.2. Hipótesis específicas .....	42
3.2. Variables e indicadores de la investigación .....	42
3.2.1. Definición conceptual de la variable.....	42

3.2.2. Definición operacional de la variable .....	43
3.3. Métodos de la investigación.....	43
3.3.1. Enfoque de la investigación .....	43
3.3.2. Alcance de la investigación .....	43
3.3.3. Diseño de la investigación .....	43
3.4. Esquema de la investigación.....	43
3.5. Población y muestra.....	44
3.6. Actividades del proceso de investigación .....	47
3.7. Técnicas e instrumentos de la investigación.....	48
3.7.1. Técnicas de recolección de datos .....	48
3.7.2. Instrumento de recolección de datos.....	48
3.8. Procedimiento para la recolección de datos.....	48
3.9. Técnicas de procesamiento y análisis de datos .....	48
<b>CAPITULO IV: RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b>	
4.1. Resultados .....	50
4.1.1. Definición del universo de discurso $U$ .....	50
4.1.2. Segmentación del universo de discurso en intervalos.....	54
4.1.3. Descripción cualitativa de los valores del desarrollo de la población como variable lingüística .....	54
4.1.4. Fuzzificación de los datos de entrada o conversión de los valores numéricos en valores difusas .....	56
4.1.5. Definición del valor pronosticado $F(t)$ .....	60
4.1.6 Defuzzificación de los resultados .....	61
4.2. Discusión.....	67
<b>CAPITULO V: CONCLUSION Y RECOMENDACION</b>	
5.1. Conclusión .....	69
5.2. Recomendación.....	70
<b>Índice de tablas</b>	
Tabla 1. Población total peruana 1950-2050 .....	44
Tabla 2. Población total peruana 1950-2050 y su variación por años .....	50
Tabla 3. Modelo de proyección de la población peruana .....	55
Tabla 4. Grado de pertenencia de cada elemento a los respectivos conjuntos difusos para el período 1951-2050. ....	57
Tabla 5. Población peruana proyectada con series de tiempo difusas ( $p$ ).....	61

Tabla 6. Comparación de pronóstico de la población peruana entre los modelos de pronóstico: series de tiempo difusas (STD), modelo lineal (ML) y el modelo logístico (MLOGI) ..... 64

### Índice de Figuras

Figura 1. Un número difuso y uno de sus $\alpha$ corte.....	31
Figura 2. Representación de un número difuso en $\mathbb{Z}$ .....	31
Figura 3. Designar mediante $\mu(x)$ la función que representa los niveles del número difuso ..	32
Figura 4. Tomando el símbolo $\alpha$ en lugar de $\mu$ .....	33
Figura 5. Función de pertenencia de los valores del conjunto difuso de la variable lingüística “Desarrollo de la población” .....	59
Figura 6. Comparación de pronóstico de la población peruana entre los modelos de pronóstico: series de tiempo difusas (STD), modelo lineal (ML) y el modelo logístico (MLOGI) .....	66

Referencias Bibliográficas

## Resumen

El presente estudio es de alcance descriptivo – propositivo, la finalidad del estudio es modelar la proyección poblacional con series de tiempo difusas, el diseño de investigación empleado es no experimental. El modelo de proyección de la población peruana (variable lingüística) obtenido fue:  $\langle NBCP, [90000, 190000], A_1 \rangle$  más  $\langle NICP, [190000, 290000], A_2 \rangle$  más  $\langle NMCP, [290000, 390000], A_3 \rangle$  más  $\langle NACP, [390000, 490000], A_4 \rangle$  más  $\langle NMACP, [490000, 590000], A_5 \rangle$ , este modelo de proyección poblacional con series de tiempo difusas presenta una tasa media de error de pronóstico de 0.106% frente a una tasa media de error de pronóstico del modelo lineal de 4.06% y 1.40% de tasa media de error de pronóstico del modelo logístico. Se concluye que el pronóstico de la población peruana con series de tiempo difusas tiene mayor precisión tomando en cuenta en el proceso, la tendencia de la población en estudio.

**Palabras clave:** proyección poblacional; series de tiempo difusas; conjuntos difusos.

## Abstract

The present study is descriptive - propositional in scope, the purpose of the study is to model the population projection with fuzzy time series, the research design used is non-experimental. The Peruvian population projection model (linguistic variable) obtained was:  $\langle NBCP, [90000, 190000], A_1 \rangle$  plus  $\langle NICP, [190000, 290000], A_2 \rangle$  plus  $\langle NMCP, [290000, 390000], A_3 \rangle$  plus  $\langle NACP, [390000, 490000], A_4 \rangle$  plus  $\langle NMACP, [490000, 590000], A_5 \rangle$ , this population projection model with fuzzy time series presents an average forecast error rate of 0.106% compared to an average forecast error rate of the linear model of 4.06% and 1.40% of the average forecast error rate of the logistic model. It is concluded that the forecast of the Peruvian population with fuzzy time series has greater accuracy taking into account in the process, the trend of the population under study.

**Keywords:** population projection; fuzzy time series; fuzzy sets.

## Introducción

la población mundial está experimentando crecimientos drásticos, sus relaciones económicas y sociales son complejas, la función de los Estados es desarrollar, implementar y evaluar programas para mejorar la calidad de vida de sus ciudadanos, por lo que necesita información del crecimiento demográfico, Rincón (1989) afirma que las proyecciones de población constituyen una de las bases fundamentales para fines de planificación de las actividades económicas y sociales de un país; en Perú, la metodología seguida para la elaboración de las proyecciones nacionales, consideran las recomendaciones, normativas y metodologías de las Naciones Unidas, que utiliza el método demográfico de los componentes (fecundidad, mortalidad y migración), método tradicional cuya principal fortaleza es su simplicidad, englobando los nacimientos y población migrante para después deducir las defunciones y emigraciones, así, de este modo contar con cierta población estimada, la cual se proyecta en el tiempo bajo supuestos del comportamiento de las tasas que regulan estos niveles, la precisión de estas estimaciones está sujeta a un determinado margen de error, por lo que se busca minimizar este error, por tanto, se busca aproximar la realidad desde la teoría de series de tiempo difusas. Para esta investigación los datos provienen del Boletín de Análisis Demográfico N° 38 del Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI) y se presenta el modelo de proyección poblacional peruana desarrollado con series de tiempo difusas; diferentes autores han venido estudiando en este campo (Abbasov y Mamedova, 2003; Argote-Cusi, 2018; Chen y Hsu, 2004; Chen y Hwang, 2000; Jilani et al., 2008; Sasu, 2010; Song y Chissom, 1993, 1994; Stevenson y Porter, 1972) y otros campos de la dinámica social humana; Tabares y Hernández (2009) y Zadeh (1975) mencionan que la ciencia moderna no puede comprender un fenómeno si no está caracterizado en términos cuantitativos, al renunciar a la precisión se disponen a entender números inciertos (números difusos) para explorar el uso de

las variables lingüísticas que son variables cuyos valores no son números sino palabras o frases en un lenguaje natural o artificial que son de utilidad en una amplia variedad de aplicaciones prácticas, Aluja (2000) menciona que la caracterización de estos números difusos son susceptibles de representarse en fenómenos con *incertidumbre* en su ocurrencia. Así el conjunto total de términos de la variable lingüística “*desarrollo de la población*” de esta investigación es: bajo crecimiento poblacional *más* invariante crecimiento poblacional *más* moderado crecimiento poblacional *más* alto crecimiento poblacional *más* muy alto crecimiento poblacional. En conclusión, la teoría de las series de tiempo difusas es útil en la modelación del crecimiento poblacional, que es un fenómeno no caracterizado en términos cuantitativos.

**CAPITULO I**  
**PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**



## **1.1. Planteamiento y fundamentación del problema de investigación**

### **1.1.1. Descripción de la realidad problemática**

Las proyecciones de población constituyen una de las bases fundamentales para fines de planificación de las actividades económicas y sociales de un país (Rincón, 1989), en el Perú la institución encargada de recolectar, clasificar y presentar información de los censos poblacionales es el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI) , con la promulgación de la Ley de Censos (Ley N° 13248) que establece una periodicidad de 10 años para los censos Nacionales de Población y Vivienda y de 5 años para los Censos Económicos, Agropecuarios, de Industria, Comercio y de Servicios para poder elaborar, ejecutar, evaluar programas de desarrollo económico y social; el Perú cuenta con datos de los censos nacionales de población y vivienda de los años 1972, 1981, 1993, 2007 y 2017, encuestas demográficas y otras como el saldo de entradas y salidas peruanas que permiten hallar las tasas de mortalidad, fecundidad, saldos migratorios, según García et al. (2019) la metodología usada en el Perú para la elaboración de las proyecciones nacionales (Tabla 1), se considera las recomendaciones, normativas y metodologías de las Naciones Unidas, que utiliza el método demográfico de los componentes (fecundidad, mortalidad y migración), el procesamiento de los datos lo realizan utilizando el PRODEX que es un programa en EXCEL preparado por el Centro Latinoamericano y Caribeño de Demografía (CELADE)-Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), el cual permite ingresar cada uno de los componentes elaborados en forma independiente, cuyo principio fundamental es la ecuación compensadora desarrollada por Pascal K. Whelpton en 1947, así, la población total es proyectada por el método de componentes, que es resultado de la combinación de la fecundidad, la mortalidad y la migración, la precisión de estas estimaciones está sujetas a un determinado margen de error, por lo

que se busca minimizar este error, por tanto, desde la teoría de series de tiempo difusas se buscará acercarse a la realidad, usando datos obtenidos del Boletín de Análisis demográfico N° 38 del INEI. Las variables de estudio están compuestas por la variable dependiente denominado: proyección poblacional y por variable independiente denominado: series de tiempo difusas. Por ende, se formula el siguiente problema de investigación:

## **1.1.2. Formulación del problema**

### **1.1.2.1. Problema general**

¿Las series de tiempo difusas permite modelar la proyección poblacional?

### **1.1.2.2. Problema específico**

- ¿Cómo definir el universo de discurso?
- ¿Cómo segmentar el universo de discurso en intervalos?
- ¿Cómo determinar la variable lingüística?
- ¿Cómo convertir los valores numéricos en valores difusos?
- ¿Cómo definir el valor pronosticado?
- ¿Cómo defuzzificar los resultados?

## **1.2. Antecedentes de la investigación**

Stevenson y Porter (2009) en la investigación *Fuzzy time series forecasting using percentage change as the universe of discourse*, proponen utilizar la variación porcentual interanual como universo de discurso. Concluyendo que el método propuesto da como resultado una mayor precisión en los pronósticos que los modelos existentes.

Song y Chissom (1993), en la investigación *Forecasting enrollments with fuzzy time series*, utilizan el concepto de series de tiempo difusas para pronosticar la matrícula en una universidad, utilizando un modelo invariante en el tiempo de primer orden, para evaluar el

modelo aplica un modelo de regresión lineal, mostrando la superioridad de las series de tiempo difusas.

Chen y Hwang (2000), en la investigación *Temperature prediction using fuzzy time series*, mencionan que el inconveniente de los métodos de pronóstico tradicionales es que no pueden lidiar con problemas de pronóstico en los cuales los datos están representados por valores lingüísticos. Ellos proponen dos algoritmos para la predicción de la temperatura (Algoritmo- B y Algoritmo – B\*), ambos algoritmos tienen la ventaja de obtener buenos resultados de pronóstico.

Abbasov y Mamedova (2003), en la investigación *Application of fuzzy time serie to population forecasting*, la metodología propuesta en este artículo permite pronosticar procesos demográficos sobre la base de series de tiempo difusas, un rasgo de la metodología consiste en su capacidad de pronosticar el indicador requerido utilizando datos de entrada incompletos y difusas. El enfoque descrito, al ingresar la dinámica de la población total hasta algún año anterior en una base experimental, ayuda a hacer cálculos de pronóstico para cualquier perspectiva distante. Esto, a su vez, nos permite tener en cuenta la tendencia de la población anterior, tasas de crecimiento y como resultado lograr pronósticos más precisos.

En su investigación *A new method for forecasting enrollments base don fuzzy tiem seris whit higher ferecast accuracy rate*, Chen y Hsu (2004), mencionan que el problema principal en el pronóstico poblacional es mejorar la precisión, los autores propusieron un método basado en series de tiempo difusas, que proporcione mayor índice de precisión de pronóstico que el método existente. El método propuesto usó un porcentaje de cambio al universo de discurso; basado en la partición media como la partición del universo de discurso y el centroide para la defuzzificación.

En su artículo *Multivariate high order fuzzy time series forecasting for car road accidents* Jilani et al. (2008), presentan el método de previsión de series de tiempo difusas multivariantes,

el método asume *m-factores* con un factor principal de interés. El historial de los últimos tres años se utiliza para hacer nuevos pronósticos. El método se aplica en el pronóstico del número total de accidentes de coche en Bélgica utilizando cuatro factores secundarios, su investigación es comparada con los métodos existentes de series de tiempo difusas, demuestran que el método propuesto funciona mejor que los métodos de pronóstico existentes.

En el artículo *An application of fuzzy time series to the romanian population* de Sasu (2010), utiliza el método de la teoría de conjuntos difusos, menciona que los valores pronosticados con series de tiempo difusas dependen de nuestra interpretación de los resultados del modelo, la metodología consiste en su capacidad para pronosticar el indicador requerido utilizando datos de entrada incompletos y difusas, el enfoque al introducir la dinámica de la población total hasta el año anterior en una base experimental ayuda a realizar cálculos de pronóstico para cualquier perspectiva lejana.

La investigación *El uso de la lógica difusa en proyecciones de la población: el caso de México* de Argote-Cusi (2018), está enmarcada en buscar mejores estimaciones, propone la teoría de los conjuntos difusos para proyectar los datos poblacionales de México y evidencia que la utilización de series de tiempo difusas resulta ser un método que logra captar la no linealidad del comportamiento poblacional.

### **1.3. Delimitación del estudio**

- Tema: Series de tiempo difusas.
- Problemática: Proyección poblacional que proporcione mayor índice de precisión de pronóstico que el método existente.
- Población de estudio: Población peruana (Boletín de análisis demográfica N° 38 (INEI).

- Lugar de estudio: Universidad Nacional del Santa - Perú
- Duración de la investigación: 1 año
- Título de la investigación: Modelo de proyección poblacional con series de tiempo difusas.

#### **1.4. Justificación e importancia de la investigación**

La importancia de esta investigación es cuantificar la incertidumbre que se relaciona a la proyección poblacional, proponiendo el modelo de proyección poblacional con series de tiempo difusas que proporcione mayor índice de precisión de pronóstico que el método existente, a partir de datos que provengan de encuestas, censos, etc.; este modelo de proyección poblacional con series de tiempo difusas, servirá como instrumento científico que cuente con la coherencia, validez y veracidad científica para la toma de decisiones en la planificación de los recursos, además de elaborar, ejecutar, evaluar programas de desarrollo económico y social. A su vez marcará en el Perú un antecedente para futuros investigadores relacionados en el tema de series de tiempo difusas.

#### **1.5. Objetivos de la investigación**

##### **1.5.1. Objetivo general**

Modelar la proyección poblacional con series de tiempo difusas

##### **1.5.2. Objetivos específicos**

- Definir el universo de discurso
- Segmentar el universo de discurso en intervalos
- Determinar la variable lingüística
- Convertir los valores numéricos en valores difusos (Fuzzificar).
- Definir el valor pronosticado.
- Defuzzificar los resultados.

**CAPITULO II**  
**MARCO TEORICO**

## **2.1 Fundamentos teóricos de la investigación**

### **2.1.1. Proyección poblacional**

La proyección demográfica es esencial porque las estimaciones de población son necesarias para medir la necesidad de vivienda, equipamiento, actividad económica, atención sanitaria, educación, etc., utilizando modelos y métodos matemáticos. Por lo tanto, las proyecciones de población se preparan utilizando modelos específicos que buscan establecer el comportamiento futuro con distintos grados de detalle y, en cualquier estudio determinado, utilizan supuestos razonables sobre la evolución futura. Rincón (1989) menciona que a partir de los resultados que se relacionan con la evolución futura de algunas personas de la muestra se crea una población. Por lo tanto, la población es en última instancia el resultado del número de personas, las poblaciones suelen tener una vida corta, por lo que la volatilidad aumenta rápidamente a medida que pasa el tiempo.

### **2.1.2. Importancia y papel de las proyecciones de población**

Una población en rápido crecimiento, una alta movilidad espacial y social, una amplia variedad de actividades profesionales que caracterizan la actualidad y la resultante heterogeneidad de la vida en la sociedad moderna hacen que la tarea de la administración pública sea cada vez más compleja y difícil. En estas circunstancias, los gobiernos deben desarrollar programas económicos y sociales para maximizar el uso de los recursos naturales y humanos y satisfacer las necesidades de bienes y servicios esenciales de los ciudadanos.

La proyección demográfica busca demostrar el potencial de las expectativas de crecimiento cuantitativo y proporcionar evidencia que muestre las consecuencias a corto, mediano y largo plazo de ciertas tendencias demográficas. Cabe aclarar que las proyecciones demográficas son una base importante para planificar las actividades

económicas y sociales del país. Muchos de estos resultados permiten determinar las consecuencias del crecimiento demográfico en diversos sectores espaciales socioeconómicos. Basta mencionar las necesidades de educación (contratación, formación de docentes, construcción de aulas de enseñanza), de atención de la salud (demanda de servicios, preparación de personal médico especializado, construcción de centros médicos), de vivienda (su tamaño e infraestructura adicional), de empleo, seguridad social, etc. se obtienen de esta información.

### **2.1.3. Clasificación de las proyecciones de población**

Una de las principales clasificaciones habitualmente aplicadas se refiere a su aplicación para resolver o dar solución a problemas que involucran períodos cronológicos muy variables y que requieren diferentes niveles de toma de decisiones.

#### **2.1.3.1. Proyecciones a corto plazo.**

Las estimaciones de población que cubren períodos muy cortos, que generalmente no exceden los cinco años, pueden considerarse como tales. Si están respaldados por conocimientos adecuados sobre las condiciones demográficas actuales. Las previsiones de este tipo son imprescindibles para planes quinquenales o similares.

#### **2.1.3.2. Proyecciones a mediano plazo.**

En este caso se trata de una perspectiva de hasta 10 o 15 años. Debido a su extensión, son menos confiables que los de corto plazo, pero muestran tendencias generales en la dinámica demográfica. Su éxito radica en los elementos que proporcionan para proyectos de desarrollo global, como construcción de infraestructura, formación de profesores, formación del personal en general, construcción de aulas, redes de servicios, hospitales, etc.



### **2.1.3.3. Proyecciones a largo plazo.**

Se consideran en este caso a las que buscan cubrir períodos de 20 años o más. Su importancia y utilidad está asociada a la formulación de análisis e interpretación de medidas y políticas demográficas. Los esfuerzos y acciones para influir las tendencias demográficas requieren tiempo para que surtan su efecto, una vez que han actuado, su influencia tiende a hacerse permanente. Son útiles también como fuentes de información para la planificación y ejecución de obras de gran magnitud para las cuales su construcción es costosa y lenta. Su interés se orienta ante todo a mostrar cuál sería la magnitud y composición de la población en un período más o menos lejano, si se cumplen las condiciones que implican las tendencias demográficas incorporadas como supuestos de evolución. Resultan, por otra parte, muy útiles para el análisis teórico, tanto pasado como futuro de una población.

### **2.1.4. Métodos generales para la elaboración de proyecciones de la población**

Los métodos de proyección son muy diversos y bastante complejos. Esto es posible gracias al desarrollo de las tecnologías de la información, al desarrollo de nuevos métodos y procedimientos de estimación, en general, al desarrollo de la propia sociedad. Todo pronóstico, independientemente de la cantidad y calidad de la información básica y de los instrumentos computacionales, tiene cierto grado de *incertidumbre*. En cuanto a las orientaciones metodológicas de las que dependerán los resultados de la proyección, pueden ser métodos matemáticos, métodos demográficos y métodos económicos.

#### **2.1.4.1. Métodos matemáticos**

El objetivo es crear un modelo de cambio relacional aplicable a problemas de población definidos por una función matemática, asumiendo que los cambios futuros resultarán de un comportamiento que puede predecirse con precisión

mediante una función matemática. Son más fáciles de diseñar y conceptualmente más fáciles de entender; Requieren menos información, menos tiempo y tecnologías simples. La idea es elegir cualquier expresión matemática buena e inequívoca en función del tiempo. La aplicación a la línea de base permitiría recuentos de población pasados y futuros.

#### **2.1.4.2. Métodos demográficos**

Se trata de modelos especializados que relacionan los cambios demográficos a lo largo del tiempo con los componentes de la dinámica demográfica, la mortalidad, la fertilidad y la migración. Con base en sus tendencias pasadas y condiciones actuales, se puede analizar su comportamiento futuro y se pueden hacer proyecciones de población basadas en estos supuestos. También destacan porque utilizan al menos el género y la edad como variables subyacentes.

#### **2.1.4.3. Métodos económicos.**

Dado que existe una relación entre los aspectos socioeconómicos y el comportamiento demográfico, se cree que se pueden realizar proyecciones de población utilizando métodos basados en estas relaciones. Estos métodos se denominan métodos económicos.

#### **2.1.5. Azar e incertidumbre**

Azar, aleatoriedad, estocástico y también suerte, son palabras ligadas de manera más o menos explícita a la teoría de las probabilidades. Así cuando se ponen en una urna y se mezclan 7 bolas rojas y 3 bolas verdes, la probabilidad de sacar una roja es de  $7/10$  y  $3/10$  para una verde. La extracción efectuada es una aleatoriedad, se puede “medir” la suerte de sacar una bola roja o una verde, para ello es necesario conocer la proporción de los colores de las bolas introducidas. Supongamos ahora que desconocemos esta

proporción y que sólo podemos realizar una sola extracción, ya no se puede “medir” la suerte. El fenómeno ya no se debe al azar, sino a la *incertidumbre*.

### 2.1.6. Intervalos de confianza

En  $\mathbb{R}$  se llama segmento a un intervalo cerrado a la izquierda y cerrado a la derecha.

Así, el subconjunto de  $\mathbb{R}$ :

$$A = [a_1, a_2], a_1 \leq a_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Es un segmento de  $\mathbb{R}$

Si se supone ahora que la única información de que se dispone en relación a una magnitud es que es mayor o igual a  $a_1$ , y menor o igual a  $a_2$ , se podrá decir que el segmento  $A$  es el “intervalo de confianza” relativo a la magnitud considerada. Vamos a examinar las propiedades del álgebra de los intervalos de confianza:

***Igualdad de dos intervalos de confianza:***

$$(a_1 = b_1 \text{ y } a_2 = b_2) \Leftrightarrow ([a_1, a_2] = [b_1, b_2]) \quad (2)$$

***Suma de intervalos de confianza:***

$$\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}: [a_1, a_2](+)[b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \quad (3)$$

Como puede observarse sigue utilizándose aquí el símbolo (+).

***Sustracción:***

$$\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}:$$

$$[a_1, a_2](-)[b_1, b_2] = [a_1 - b_1, a_2 - b_2] \quad (4)$$

Se escribirán los intervalos de confianza con letras mayúsculas tales como: A,B,C,..

El complemento de A, es:

$$A^{-1} = [-a_2, -a_1] \quad (5)$$

Se podrá escribir que:

$$A(+A^{-1}) = [a_1, a_2](+)[-a_2, -a_1] = [a_1 - a_2, a_2 - a_1] \neq 0 \quad (6)$$

Excepto si A se reduce a un punto de  $\mathbb{R}$ .

Cuando un intervalo de confianza se reduce a un punto de  $\mathbb{R}$ , se escribe:

$$A = [a, a] = a \quad (7)$$

Por lo que se obtiene entonces un real.

La operación (+) en los intervalos de confianza es conmutativa, asociativa y posee como neutro:

$$[0,0] = 0 \quad (8)$$

Así, los intervalos de confianza forman un monoide conmutativo en  $\mathbb{R}$ .

Se tiene:

$$[a_1, a_2](+)[b_1, b_2] = [b_1, b_2](+)[a_1, a_2] \quad (9)$$

$$[a_1, a_2](+)([b_1, b_2](+)[c_1, c_2]) = ([a_1, a_2](+)[b_1, b_2])(+)[c_1, c_2] \quad (10)$$

$$[a_1, a_2](+)[0,0] = [a_1, a_2] \text{ y } [0,0](+)[a_1, a_2] = [a_1, a_2] \quad (11)$$

Por lo deducido en (6) los intervalos de confianza no forman un grupo para la adición.

La sustracción no es conmutativa ni asociativa.

### ***Multiplicación:***

La multiplicación exige una mayor atención. Primero, la consideraremos en  $\mathbb{R}^+$

$\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+$ :

$$[a_1, a_2](\cdot)[b_1, b_2] = [a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2] \quad (12)$$

$$[a_1, a_2](\cdot)[b_1, b_2] =$$

$$[MIN(a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2), MAX(a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)] \quad (13)$$

La inversa de un intervalo de confianza A se escribe  $A^{-1}$  y proporciona en  $\mathbb{R}^+$ :

$$A^{-1} = \left[ \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1} \right], a_1, a_2 < 0, \text{ o bien } a_1, a_2 > 0 \quad (14)$$

Y de manera más general en  $\mathbb{R}$ :

$$A^{-1} = \left[ \text{MIN} \left( \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \right), \text{MAX} \left( \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \right) \right] \quad (15)$$

Se puede observar que:

$$A(\cdot)A^{-1} \neq 1 \quad (16)$$

Excepto si A se reduce a un real.

la multiplicación es asociativa en  $\mathbb{R}$ , a partir de 13 o examinando todos los casos posibles.

Así, los intervalos de confianza forman en  $\mathbb{R}$  un monoide conmutativo cuyo neutro es:

$$[1,1] = 1 \quad (17)$$

### ***División:***

Se considera la división de A por B como la multiplicación de A por  $B^{-1}$

$$A(\cdot)B = A(\cdot)B^{-1} \quad (18)$$

Recurrimos a las fórmulas (13) y (15) para el caso de  $\mathbb{R}$  y (12) y (14) para el caso de  $\mathbb{R}^+$ .

En  $\mathbb{R}^+$  se escribirá:

$$[a_1, a_2](\cdot)[b_1, b_2] = [a_1, a_2](\cdot) \left[ \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1} \right] = \left[ \frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_1} \right] \quad (19)$$

Multiplicación por un real:

Sea  $k \in \mathbb{R}$  y  $A = [a_1, a_2], a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$\text{Entonces: } k \cdot A = [\text{MIN}(k \cdot a_1, k \cdot a_2), \text{MAX}(k \cdot a_1, k \cdot a_2)] \quad (20)$$

$$\text{También podemos escribir: } k \cdot A = k \cdot [a_1, a_2] = [k \cdot a_1, k \cdot a_2] \text{ si } k \geq 0 \quad (21)$$

División por un número real:

Si se establece que  $k' = \frac{1}{k}$  nos hallamos de nuevo en el supuesto de la multiplicación suponiendo  $k \neq 0$ .

### ***Comparación entre dos intervalos de confianza***

Los intervalos de confianza  $A \subset \mathbb{R}$  no forman como  $\mathbb{R}$  un orden total, sino un orden parcial. Así:

$$[-3,4] \text{ no puede ser comparado con } [-2,3] \quad (22)$$

Para pasar de un orden parcial a un orden total es necesario establecer de manera arbitraria un criterio, y si con uno no basta, recurriremos a otro.

Tomemos como primer criterio la suma de las abscisas de los extremos o bien la abscisa de la posición media:

$$\lambda([a_1, a_2]) = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (23)$$

Se escribirá entonces:

$$A > B \text{ si } \frac{a_1 + a_2}{2} > \frac{b_1 + b_2}{2} \quad (24)$$

Y si  $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ , es preciso adoptar otro criterio, como, por ejemplo:

$$A > B \text{ si } a_2 > b_2 \text{ y } a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \quad (25)$$

O bien:

$$A > B \text{ si } a_1 > b_1 \text{ y } a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \quad (26)$$

$$\text{Se tiene que } a_1 \geq b_1 \text{ y } a_2 \geq b_2 \quad (27)$$

$A$  y  $B$  son entonces comparables y tenemos  $A \geq B$

### ***Máximos y mínimos***

También podemos definir un mínimo y un máximo. Utilicemos el símbolo  $\wedge$  para el mínimo de dos reales y  $\vee$  para el máximo.

$$A(\wedge)B = [a_1, a_2](\wedge)[b_1, b_2] = [a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2] \quad (28)$$

$$A(\vee)B = [a_1, a_2](\vee)[b_1, b_2] = [a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2] \quad (29)$$

También se verifica:

$$(A(\wedge)B)(+)C = (A(+)C)(\wedge)(B(+)C) \quad (30)$$

$$(A(\vee)B)(+)C = (A(+)C)(\vee)(B(+)C) \quad (31)$$

$$(A(\wedge)B)(.)C = (A(.)C)(\wedge)(B(.)C) \text{ en } \mathbb{R}^+ \quad (32)$$

$$(A(\vee)B)(.)C = (A(.)C)(\vee)(B(.)C) \text{ en } \mathbb{R}^+ \quad (33)$$

### 2.1.7. Números difusos

Un número difuso se halla formado por una secuencia finita o infinita de intervalos de confianza con las siguientes propiedades:

1. Se afecta a cada intervalo de confianza un valor  $\alpha \in [0,1]$ , de tal manera que dos intervalos de confianza diferentes no pueden tener el mismo valor  $\alpha$ . Este valor se llama “nivel de presunción”.
2. Se designa por  $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$  el intervalo de confianza de nivel  $\alpha$ . Se debe cumplir:

$$(\alpha' < \alpha) \Rightarrow (A_\alpha \supset A_{\alpha'}), \alpha, \alpha' \in [0,1] \quad (34)$$

Dicho de otra manera, los intervalos de confianza deben encajarse, estrictamente o no, los unos con los otros.

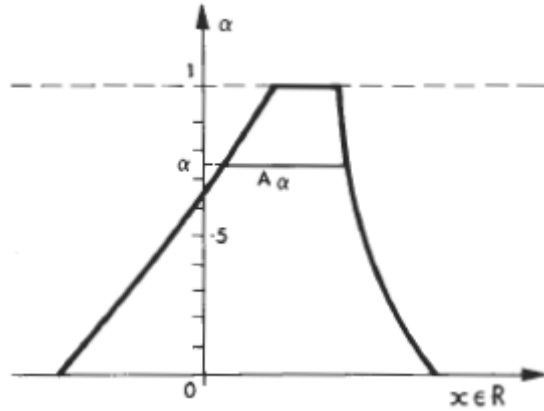
3. Existe un intervalo y sólo uno que puede reducirse a un real único.

Así  $A_\alpha$  es una aplicación funcional en  $\alpha$ .

Un número difuso será representado por una mayúscula A, con un símbolo  $\sim$  (tilde) arriba, ósea  $\tilde{A}$ . El intervalo de confianza de nivel  $\alpha$  será designado por  $A_\alpha$  y lo llamaremos también “ $\alpha$  corte de  $\tilde{A}$ ”.

La figura 1 representa un número difuso y uno de sus  $\alpha$  cortes. Como puede observarse el concepto de número difuso es una generalización del concepto de intervalo de confianza. En lugar de un único intervalo de confianza, consideramos una familia que satisface las propiedades 1), 2) y 3) expresadas líneas arriba.

**Figura 1.** Un número difuso y uno de sus  $\alpha$  cortes



En la figura 2, se representa un número difuso  $\mathbb{Z}$ , tomando 11  $\alpha$ -cortes,  $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1$  (los niveles de presunción vienen dados con un decimal, pero puede tomarse tantos  $\alpha$  cortes como sean necesarios).

**Figura 2.** Representación de un número difuso en  $\mathbb{Z}$

$\alpha$									
1					1				
0.9					1				
0.8				1	1	1			
0.7			1	1	1	1			
0.6			1	1	1	1			
0.5			1	1	1	1	1		
0.4			1	1	1	1	1		
0.3			1	1	1	1	1		
0.2		1	1	1	1	1	1		
0.1		1	1	1	1	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\tilde{A} =$	0.0	0.2	0.7	0.8	0.8	1.0	0.5	0.1	0.0



Un número difuso se puede presentar de dos maneras:

1. A cada nivel  $\alpha$  se le asigna el intervalo de confianza:

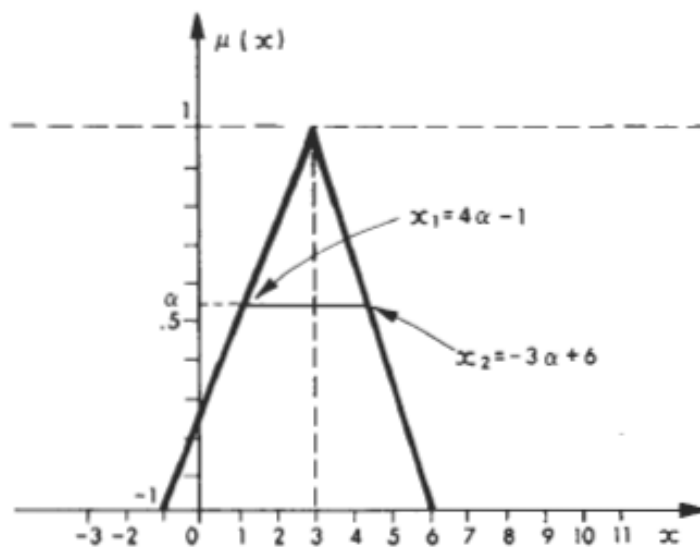
$$\forall \alpha \in [0,1], A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] \quad (35)$$

2. Otra manera consiste en designar mediante  $\mu(x)$  la función que representa los niveles del número difuso para cada valor de  $x \in \mathbb{R}$  (eventualmente  $\in \mathbb{Z}$ ). Para ello, hay que dar la función  $\mu_1(x)$  a la izquierda y la función  $\mu_2(x)$  a la derecha tomando una  $x$  tal que:

$$\mu_1(x) = \mu_2(x) = 1 \quad (36)$$

Veamos un ejemplo en la figura 3.

**Figura 3.** Designar mediante  $\mu(x)$  la función que representa los niveles del número difuso.



La función  $\mu(x)$  será: (37)

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mu(x) &= 0, & x &\leq -1 \\ &= \frac{x+1}{4}, & -1 &\leq x \leq 3 \end{aligned}$$

$$= \frac{-x + 6}{3} \quad , \quad 3 \leq x \leq 6$$

$$= 0 \quad , \quad 6 \leq x$$

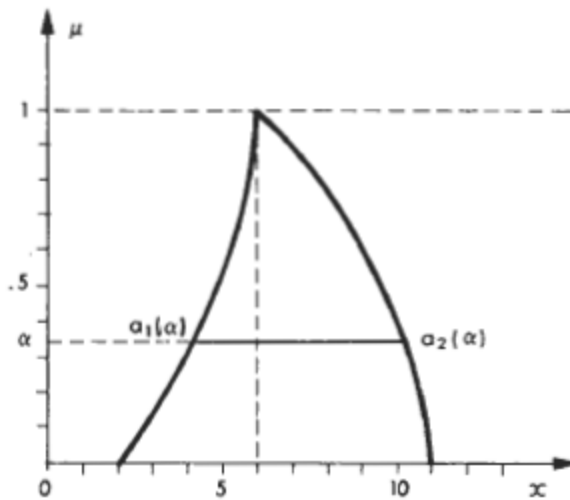
Al tomar el símbolo  $\alpha$  en lugar de  $\mu$ , se obtendrá el intervalo de confianza de nivel  $\alpha$  tomando la función inversa de  $\mu$  primero en la parte izquierda de  $\tilde{A}$  para obtener  $a_1(\alpha)$  y luego en la parte derecha para obtener  $a_2(\alpha)$ , es decir:

$$A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] = [4\alpha - 1, -3\alpha + 6] \quad (38)$$

Las dos maneras de representar mediante una fórmula el número difuso  $\tilde{A}$ , o sea (37) y (38) son equivalentes.

Veamos otro ejemplo:

**Figura 4.** Tomando el símbolo  $\alpha$  en lugar de  $\mu$



La función  $\mu(x)$  será: (39)

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\mu(x) = 0 \quad , \quad x \leq 2$$

$$= \frac{1}{4}(x - 2)^2 \quad , \quad 2 \leq x \leq 6$$

$$= \sqrt{\frac{11-x}{5}} \quad , \quad 6 \leq x \leq 11$$

$$= 0 \quad , \quad 11 \leq x$$

Al tomar el símbolo  $\alpha$  en lugar de  $\mu$ , se obtendrá el intervalo de confianza de nivel  $\alpha$  tomando la función inversa de  $\mu$  primero en la parte izquierda de  $\tilde{A}$  para obtener  $a_1(\alpha)$  y luego en la parte derecha para obtener  $a_2(\alpha)$ , es decir:

$$A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] = [2 + 4\sqrt{\alpha}, 11 - 5\alpha^2], \alpha \in [0,1] \quad (40)$$

Las dos maneras de representar mediante una fórmula el número difuso  $\tilde{A}$ , o sea las figuras 3 y 4 son equivalentes.

### 2.1.8. Conjuntos difusos

Un conjunto difuso es una clase de objetos con un continuo de grados de pertenencia. Un conjunto de este tipo se caracteriza por una función de pertenencia que asigna a cada objeto un grado de pertenencia comprendido entre cero y uno (Zadeh, 1965).

#### 2.1.8.1. Características generales de los conjuntos difusos

Un conjunto difuso expresa el grado de pertenencia al conjunto que tiene cada uno de los elementos. El conjunto difuso  $A$  en  $X$  puede definirse como el conjunto de los pares ordenados.

$$A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in X\}$$

Donde  $\mu_A(x)$  es la función de pertenencia del conjunto.

La función de pertenencia asigna para cada elemento de  $X$  un grado de membresía al conjunto  $A$ . El valor de esta función está en el intervalo entre 0 y 1, siendo 1 el valor para máxima pertenencia. Si el valor de esta función se restringiera solamente a 0 y 1, se tendría un conjunto clásico, o no difuso. Esta

función no es única. Las funciones utilizadas más frecuentemente son las de tipo trapezoidal, triangular, sigmoïdal, gaussiana.

### 2.1.8.2. Definiciones

**Definición 1:** (conjunto difuso)

Chen and Hsu (2004) refiere que los conjuntos difusos son conjuntos cuyos elementos tienen un grado de pertenencia.

Sea  $U$  el universo de discurso,  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  y el conjunto difuso  $A$  en el universo de discurso  $U$  definido de la siguiente manera:

$$A = f_A(u_1)/u_1 + f_A(u_2)/u_2 + \dots + f_A(u_n)/u_n$$

Donde:  $f_A(x)$  es la función de pertenencia del conjunto  $A$ .  $f_A: U \rightarrow [0,1]$ ,  $f_A(u_i)$

indica el grado de pertenencia de  $u_i$  en el conjunto difuso  $A$ ,  $f_A(u_i) \in [0,1]$ ,

$1 \leq i \leq n$ .

**Definición 2:** (serie de tiempo difusas)

Sea  $Y(t) \in R^1(t = 0,1,2, \dots)$  una serie de tiempo. Si  $f_i(t)$  es un conjunto difuso en  $Y(t)$  y  $F(t) = \{f_1(t), f_2(t), \dots \dots \dots\}$  entonces  $F(t)$  se llama serie de tiempo difuso en  $Y(t)$ .

Para simplificar, solo se usará el modelo de primer orden.

**Definición 3:** (modelo de primer orden)

Supongamos que  $F(t)$  es causado por  $F(t - 1)$ , es decir  $F(t - 1) \rightarrow F(t)$ .

Entonces esta relación se puede expresar como  $F(t) = F(t - 1) \circ R(t, t - 1)$

donde  $R(t, t - 1)$  es una relación difusa y se denomina modelo de primer orden de

$F(t)$ . (donde  $\circ$  es la composición máxima-mínima)

**Definición 4:** (serie de tiempo difusas)

Supongamos que  $R(t, t - 1)$  es un modelo de primer orden de  $F(t)$ . Si para cualquier  $t$ ,  $R(t, t - 1)$  es independiente de  $t$ , es decir, para cualquier  $t$ ,  $R(t, t - 1) = R(t - 1, t - 2)$  entonces  $F(t)$  se llama una serie de tiempo difuso invariante en el tiempo o también se le llama series de tiempo difusos en el tiempo.

**Teorema 1:** Sea  $F(t)$  una serie de tiempo difusa. Si para cualquier  $t$ ,

$F(t) = F(t - 1)$ , entonces  $F(t)$  es una serie de tiempo difusa invariante en el tiempo.

Podemos ver que, así como la definición  $f_i(t)$  donde  $i = 1, 2, \dots$  es subjetiva, también lo es  $F(t)$ , es decir, podemos definir un tiempo-invariante o un tiempo-variante de serie de tiempo difuso en un universo. Pero dado que la definición de  $f_i(t)$  no es arbitraria, los conceptos de serie de tiempo difuso invariante en el tiempo y variante en el tiempo son significativos, lo cual se puede ver en el siguiente teorema.

**Teorema 2:** Si  $F(t)$  es una serie de tiempo difusa,  $F(t) = F(t - 1)$  para cualquier  $t$ ; y  $F(t)$  tiene solo elementos finitos  $f_i(t)$ , entonces:

$$R(t, t - 1) = f_{i_1}(t - 1)f_{j_1}(t) \cup f_{i_2}(t - 2)f_{j_2}(t - 1) \cup \dots \cup f_{i_m}(t - m - m)f_{j_m}(t - m + 1) \text{ donde } m > 0$$

Este teorema implica que en el caso de series de tiempo difusas invariantes en el tiempo, es muy fácil y conveniente calcular el modelo de primer orden. De hecho, dado que difícilmente podemos definir conjuntos difusos infinitos en cualquier universo, una vez que  $F(t) = F(t - 1)$ , es decir, en dos puntos de tiempo

sucesivos  $t_1$  y  $t_2$  tenemos los mismos conjuntos difusos, entonces podemos obtener series de tiempo difusas invariantes en el tiempo. Por lo tanto, el teorema 2 es muy útil.

## 2.2. Marco conceptual

### 2.2.1. Definiciones

#### 2.2.1.1. Modelo logístico (Trinidad, 2014)

Sea la ecuación diferencial logística que viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{dN(t)}{dt} = KN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{A}\right)$$

Dado que  $N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{A}\right) \neq 0$  y usando el método de separación de variables

se tiene que: 
$$\frac{1}{N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{A}\right)} \frac{dN(t)}{dt} = K \quad (41)$$

Integrando ambos lados de la ecuación (41) con respecto a  $t$ , se tiene:

$$\int \frac{1}{N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{A}\right)} \frac{dN(t)}{dt} dt = \int K dt \quad (42)$$

Realizando un cambio de variable para la integral del lado izquierdo de la ecuación (42), se tiene que:  $W = N(t)$

$$dW = \frac{dN(t)}{dt} dt$$

Sustituyendo los valores  $W$  y  $dW$  en la integral se obtiene:

$$\int \frac{dW}{W \left(1 - \frac{W}{A}\right)} = \int K dt \quad (43)$$

Para resolver la integral del lado izquierdo se utilizó el método de fracciones parciales, obteniendo:

$$\frac{1}{W \left(1 - \frac{W}{A}\right)} = \frac{P}{W} + \frac{Q}{1 - \frac{W}{A}} \Rightarrow P \left(1 - \frac{W}{A}\right) + QW = 1$$

Para que dos polinomios del mismo grado sean iguales deben de tener todos sus coeficientes iguales, por lo cual para el polinomio de  $W$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \left(Q - \frac{P}{A}\right)W + P = 1 &\Rightarrow P = 1 \quad \left(Q - \frac{P}{A}\right) = 0 \\ &\Rightarrow P = 1 \quad y \quad Q = \frac{1}{A} \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de  $P$  y  $Q$  la integral toma la siguiente forma y resolviendo es tiene que:

$$\Rightarrow \int \frac{dW}{W\left(1 - \frac{W}{A}\right)} = \int \left(\frac{1}{W} + \frac{\frac{1}{A}}{1 - \frac{W}{A}}\right) dW = \int \frac{dW}{W} + \int \frac{\frac{1}{A}}{1 - \frac{W}{A}} dW$$

La solución para la primera integral es:

$$\int \frac{dW}{W} = \ln(W) + C_1$$

Para la segunda integral se tiene que:

$$\int \frac{\frac{1}{A}}{1 - \frac{W}{A}} dW \tag{44}$$

Haciendo un cambio de variable se obtiene que:

$$U = 1 - \frac{W}{A}, \quad dU = -\frac{1}{A} dW$$

Se sustituyen los valores de  $U$  y  $dU$  en la integral (44) y resolviendo, se tiene que:

$$-\int \frac{dU}{U} = -\ln(U) + C_2 \tag{45}$$

Dado que  $U = 1 - \frac{W}{A}$ , entonces la solución es:

$$\begin{aligned} -\ln(U) + C_2 &= -\ln\left(\frac{A - W}{A}\right) + C_2 \\ &= -\ln(A - W) + \ln(A) + C_2 \\ &= -\ln(A - W) + C_3 \end{aligned}$$

$C_3 = \ln(A) + C_2$  son constantes de integración.

Entonces se tiene la solución de las integrales:

$$\int \frac{dW}{W} + \int \frac{\frac{1}{A}}{1 - \frac{W}{A}} dW = \ln(W) - \ln(A - W) + C_3$$

$$= \ln\left(\frac{W}{A-W}\right) + C_3 \quad (46)$$

La solución de la integral del lado derecho de la ecuación (43) es:

$$\int K dt = Kt + C_4 \quad (47)$$

Donde  $C_4$  es una constante de integración, ya obteniendo las soluciones (46) y (47), se llega a la solución para la ecuación diferencial logística, que está dada por:

$$\ln\left(\frac{W}{A-W}\right) + C_3 = Kt + C_4 \quad (48)$$

$$\ln\left(\frac{W}{A-W}\right) = Kt + C_4 - C_3$$

$$\ln\left(\frac{W}{A-W}\right) = Kt + C_5$$

Donde  $C_5 = C_4 - C_3$ , es una constante de integración

Aplicando la función exponencial de ambos lados de la ecuación (48) se obtiene:

$$e^{\ln\left(\frac{W}{A-W}\right)} = e^{Kt+C_5}$$

$$\frac{W}{A-W} = B e^{kt},$$

Donde  $B = e^{C_5}$ , es una constante de integración y ahora despejando  $W$  y volvemos a la variable  $N(t)$

$$N(t) = \frac{A}{1 + B e^{-Kt}} \quad (49)$$

La ecuación (49) es el modelo logístico.

Donde:



$B$ : es cualquier número real positivo que depende de la condición inicial  $N(0)$ ,

$A$ : es el valor del crecimiento máximo de la población,

$K$ : es la tasa de crecimiento intrínseco.

### 2.2.1.2. Modelo lineal

Sea  $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$  un conjunto de  $N$  puntos cuyas abscisas  $\{x_k\}$  son todas distintas. La recta de regresión o recta óptima (en el sentido de los mínimos cuadrados) es la recta  $y = Ax + B$  que minimiza el error cuadrado medio  $E_2(f)$  que será mínima si, y sólo si:  $N(E_2(f))^2 = \sum_{k=1}^N (Ax_k + B - y_k)^2$ .

**Teorema 3:** (Recta de regresión en mínimos cuadrados). Supongamos que  $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$  son  $N$  puntos cuyas abscisas  $\{x_k\}_{k=1}^N$  son distintas. Entonces los coeficientes de la recta de regresión  $y = Ax + B$  son la solución del siguiente sistema lineal, conocido como las *ecuaciones normales de Gauss*:

$$\left( \sum_{k=1}^N x_k^2 \right) A + \left( \sum_{k=1}^N x_k \right) B = \sum_{k=1}^N x_k y_k$$
$$\left( \sum_{k=1}^N x_k \right) A + NB = \sum_{k=1}^N y_k \quad (50)$$

### 2.2.1.3. Error de pronóstico (Mathews & Fink, 2000)

Supongamos que  $\hat{p}$  es una aproximación a  $p$ . El error absoluto de la aproximación

$$\text{es: } E_p = |p - \hat{p}| \quad (51)$$

y el error relativo es:

$$Rp = \frac{|p - \hat{p}|}{|p|}, p \neq 0 \quad (52)$$

la tasa media de error de pronóstico (TMEP) está dado por:

$$TMEP = \frac{\sum \frac{|p - \hat{p}|}{|p|}}{n} \times 100\% \quad (53)$$

**CAPITULO III**  
**MARCO METODOLÓGICO**

### 3.1 Hipótesis central de la investigación

#### 3.1.1. Hipótesis general

- Las series de tiempo difusas permite modelar la proyección poblacional.

#### 3.1.2. Hipótesis específicas

- Encontrando el valor máximo y mínimo de la variación de población.
- Segmentando el universo de discurso en  $n$  intervalos de igual longitud.
- Para determinar la variable lingüística se procede:

a cada valor lingüístico le corresponde una variable difusa que, de acuerdo con una regla, se asignará contra un conjunto difuso.

- Para convertir los valores numéricos en valores difusos, se definirán los conjuntos de los conjuntos difusos en el universo de discurso  $U$  por la fórmula:

$$\mu_{A_i}(u_j) = \frac{1}{1+[C(u-u_{jm})]^2} \quad (54)$$

- Para definir el valor pronosticado se calcula la matriz de operaciones y la matriz de criterios posterior a esto se halla la relación difusa, para luego definir el valor pronosticado en forma difusa.
- Para defuzzificar los resultados obtenidos (conversión de los valores difusos en valores cuantitativos) se propone la fórmula:

$$V(t) = \frac{\sum_{i=1}^5 \mu_{A_i}(u_j) \times u_{im}}{\sum_{i=1}^5 \mu_{A_i}(u_j)} \quad (55)$$

### 3.2. Variables e indicadores de la investigación

#### 3.2.1. Definición conceptual de la variable

**3.2.1.1. Variable: series de tiempo difusas:** Las secuencias cronológicas de datos imprecisos se consideran series de tiempo con datos difusos. Una serie de tiempo con datos difusos se denomina series de tiempo difusas.

### 3.2.2. Definición operacional de la variable

#### 3.2.2.1. Variable:

La variable series de tiempo difusas se define y se mide mediante la integración de sus cuatro dimensiones.

VARIABLE	DIMENSIÓN
Serie de tiempo difusas	Universo de discurso
	Variable lingüística
	Fuzzificación
	Defuzzificación

### 3.3. Métodos de la investigación

#### 3.3.1. Enfoque de la investigación

La investigación desarrollada es de enfoque cuantitativo dado que posee un conjunto de procesos secuenciales y probatorios.

#### 3.3.2. Alcance de la investigación

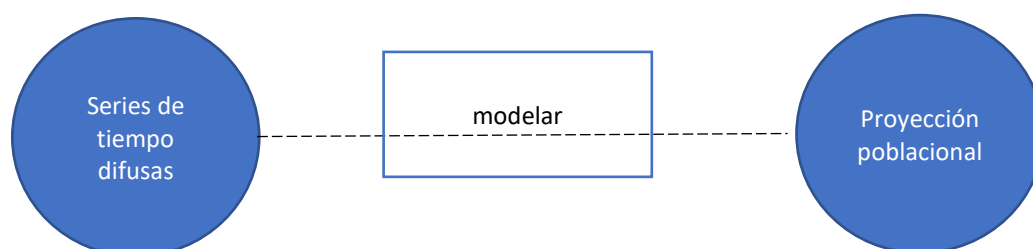
El alcance de la investigación es descriptivo - propositivo.

#### 3.3.3. Diseño de investigación

La investigación desarrollada corresponde a una investigación de diseño no experimental transeccional, se trata de un estudio donde no varía de forma intencional la variable independiente para observar el efecto sobre la otra variable.

### 3.4. Esquema de la investigación

Con el propósito de responder a las preguntas de investigación, cumplir con los objetivos del estudio y someter a prueba las hipótesis, el diseño de investigación es no experimental y su diagrama fue:



### 3.5. Población y muestra

#### 3.5.1. Población

**Tabla 1.** *Población total peruana 1950-2050*

<b>AÑO</b>	<b>POBLACION TOTAL</b>
1950	7777447
1951	7979073
1952	8186864
1953	8401865
1954	8625127
1955	8857699
1956	9098885
1957	9347986
1958	9606047
1959	9874125
1960	10153262
1961	10444555
1962	10747306
1963	11059880
1964	11380635
1965	11707947
1966	12041432
1967	12382179
1968	12730755
1969	13087738
1970	13453692
1971	13829543
1972	14214908

<b>AÑO</b>	<b>POBLACION TOTAL</b>
1973	14608406
1974	15008648
1975	15414250
1976	15826152
1977	16245280
1978	16670224
1979	17099568
1980	17531898
1981	17967707
1982	18407934
1983	18851845
1984	19298720
1985	19747819
1986	20201403
1987	20659953
1988	21120089
1989	21578440
1990	22031627
1991	22479500
1992	22924304
1993	23366275
1994	23805630
1995	24242600
1996	24689213
1997	25145317
1998	25592876
1999	26013829
2000	26390142
2001	26714547

<b>AÑO</b>	<b>POBLACION TOTAL</b>
2002	26999085
2003	27254632
2004	27492091
2005	27722342
2006	27934784
2007	28122158
2008	28300372
2009	28485319
2010	28692915
2011	28905725
2012	29113162
2013	29341346
2014	29616414
2015	29964499
2016	30422831
2017	30973992
2018	31562130
2019	32131400
2020	32625948
2021	33035304
2022	33396698
2023	33725844
2024	34038457
2025	34350244
2026	34660114
2027	34957600
2028	35244330
2029	35521943
2030	35792079

<b>AÑO</b>	<b>POBLACION TOTAL</b>
2031	36054888
2032	36309290
2033	36555034
2034	36791909
2035	37019661
2036	37238190
2037	37447651
2038	37648215
2039	37840036
2040	38023290
2041	38198236
2042	38364756
2043	38522478
2044	38670990
2045	38809920
2046	38939517
2047	39060054
2048	39171129
2049	39272354
2050	39363351

Fuente: García et al. (2019)

Nota: la metodología usada en el Perú para la elaboración de las proyecciones nacionales, considera las recomendaciones, normativas y metodologías de las Naciones Unidas, que utiliza el método demográfico de los componentes (fecundidad, mortalidad y migración), el procesamiento de los datos lo realizan utilizando el PRODEX (programa en EXCEL preparado por CELADE-CEPAL).

### **3.6. Actividades del proceso de investigación**

Los datos se obtuvieron del Boletín de Análisis Demográfico N° 38 del Instituto Nacional de Estadística e Informática; el primer paso fue definir el universo de discurso  $U$ , para luego



segmentar dicho universo de discurso en intervalos de igual longitud  $u_j$ , se pasó a determinar la variable lingüística “Desarrollo de la población”, continuando con la conversión de los valores numéricos en valores difusos, se definió el valor pronosticado y por último la defuzzificación de los valores pronosticados para cada año de pronóstico.

### **3.7. Técnicas e instrumentos de la investigación**

#### **3.7.1. Técnica de recolección de datos**

Análisis documentales

#### **3.7.2. Instrumento de recolección de datos**

Documentos de archivo de fuentes gubernamentales.

### **3.8. Procedimiento para la recolección de datos**

La data se obtuvo del Instituto Nacional de Estadística e Informática.

### **3.9. Técnicas de procesamiento y análisis de los datos**

- Series de tiempo difusas.
- Comparación de los resultados con los modelos logístico y lineal.

**CAPÍTULO IV**  
**RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

## 4.1. Resultados

Se empleó el concepto de series de tiempo difusas para pronosticar la población peruana (retrospectivo y prospectivamente), utilizando el modelo invariante en el tiempo de primer orden. El método propuesto se presenta a continuación.

### 4.1.1. Definición del universo de discurso $U$

Para definir el universo de discurso, se dispuso de los datos de la población peruana, que contiene la menor y la mayor variación de la población total.

La Tabla 2 muestra la población total durante los 1950-2050 (datos de entrada para el pronóstico retrospectivo y prospectivo) y variación en la población total (se entiende por variación a la diferencia entre la población actual y la población anterior).

**Tabla 2.** Población total peruana 1950-2050 y su variación por años

AÑO	POBLACION TOTAL	VARIACION DE LA POBLACIÓN ( $U$ )
1950	7777447	
1951	7979073	201626
1952	8186864	207791
1953	8401865	215001
1954	8625127	223262
1955	8857699	232572
1956	9098885	241186
1957	9347986	249101
1958	9606047	258061
1959	9874125	268078
1960	10153262	279137
1961	10444555	291293
1962	10747306	302751
1963	11059880	312574
1964	11380635	320755

<b>AÑO</b>	<b>POBLACION TOTAL</b>	<b>VARIACION DE LA POBLACIÓN (U)</b>
1965	11707947	327312
1966	12041432	333485
1967	12382179	340747
1968	12730755	348576
1969	13087738	356983
1970	13453692	365954
1971	13829543	375851
1972	14214908	385365
1973	14608406	393498
1974	15008648	400242
1975	15414250	405602
1976	15826152	411902
1977	16245280	419128
1978	16670224	424944
1979	17099568	429344
1980	17531898	432330
1981	17967707	435809
1982	18407934	440227
1983	18851845	443911
1984	19298720	446875
1985	19747819	449099
1986	20201403	453584
1987	20659953	458550
1988	21120089	460136
1989	21578440	458351
1990	22031627	453187
1991	22479500	447873
1992	22924304	444804

<b>AÑO</b>	<b>POBLACION TOTAL</b>	<b>VARIACION DE LA POBLACIÓN (U)</b>
1993	23366275	441971
1994	23805630	439355
1995	24242600	436970
1996	24689213	446613
1997	25145317	456104
1998	25592876	447559
1999	26013829	420953
2000	26390142	376313
2001	26714547	324405
2002	26999085	284538
2003	27254632	255547
2004	27492091	237459
2005	27722342	230251
2006	27934784	212442
2007	28122158	187374
2008	28300372	178214
2009	28485319	184947
2010	28692915	207596
2011	28905725	212810
2012	29113162	207437
2013	29341346	228184
2014	29616414	275068
2015	29964499	348085
2016	30422831	458332
2017	30973992	551161
2018	31562130	588138
2019	32131400	569270
2020	32625948	494548

<b>AÑO</b>	<b>POBLACION TOTAL</b>	<b>VARIACION DE LA POBLACIÓN (U)</b>
2021	33035304	409356
2022	33396698	361394
2023	33725844	329146
2024	34038457	312613
2025	34350244	311787
2026	34660114	309870
2027	34957600	297486
2028	35244330	286730
2029	35521943	277613
2030	35792079	270136
2031	36054888	262809
2032	36309290	254402
2033	36555034	245744
2034	36791909	236875
2035	37019661	227752
2036	37238190	218529
2037	37447651	209461
2038	37648215	200564
2039	37840036	191821
2040	38023290	183254
2041	38198236	174946
2042	38364756	166520
2043	38522478	157722
2044	38670990	148512
2045	38809920	138930
2046	38939517	129597
2047	39060054	120537
2048	39171129	111075

AÑO	POBLACION TOTAL	VARIACION DE LA POBLACIÓN ( $U$ )
2049	39272354	101225
2050	39363351	90997

Para definir el universo de discurso  $U$ , primero se definen el valor mínimo y máximo en la columna de variación de la población. Se encontró el valor máximo que se denota por  $v_{max} = 588138$  y el valor mínimo denotado con  $v_{min} = 90997$ , se definió el universo con la fórmula:  $U = [v_{min} - D_1, v_{max} + D_2]$  donde  $D_1$  y  $D_2$  son dos números positivos, escogemos  $D_1 = 997$  y  $D_2 = 1862$ .

Luego el universo de discurso es:  $U = [90000, 590000]$

#### 4.1.2. Segmentación del universo de discurso en intervalos

Se segmentó el universo de discurso  $U$  en  $n$  intervalos de igual longitud:

$$\ell = \frac{[(v_{max}+D_2)-(v_{min}-D_1)]}{n}, \text{ con } u_n = [v_{min} - D_1 + (n - 1)\ell, v_{min} - D_1 + n\ell]$$

Obteniendo los intervalos:

$$u_1 = [90000, 190000]; u_2 = [190000, 290000]; u_3 = [290000, 390000];$$

$$u_4 = [390000, 490000]; u_5 = [490000, 590000].$$

Tomando en cuenta que el pronóstico con series de tiempo difusas presenta el menor error promedio, se halló los puntos medios de cada uno de los intervalos:

$$u_{1m} = 140000, u_{2m} = 240000, u_{3m} = 340000, u_{4m} = 440000, u_{5m} = 540000.$$

#### 4.1.3. Descripción cualitativa de los valores del “desarrollo de la población” como variable lingüística.

Las variables lingüísticas son variables cuyos valores no son numéricos, sino son palabras o frases que desempeñan la misma función que un valor numérico, la totalidad de los valores de una variable lingüística constituye un conjunto de términos, que en principio podría

tener un número infinito de elementos, es importante comprender que la noción de *incertidumbre* es distinta de la de probabilidad (Zadeh, 1975).

Se determinó los valores respectivos de la variable lingüística o del conjunto del conjunto difuso como se observa en la tabla 3.

**Tabla 3.** Modelo de proyección de la población peruana

CONJUNTO DIFUSO	VARIABLE LINGÜÍSTICA “DESARROLLO DE LA POBLACION”
$A_1$ = Nivel bajo de crecimiento poblacional (NBCP)	$\langle NBCP, [90000,190000], A_1 \rangle$
$A_2$ = Nivel invariante de crecimiento poblacional (NICP)	$\langle NICP, [190000,290000], A_2 \rangle$
$A_3$ = Nivel moderado de crecimiento poblacional (NMCP)	$\langle NMCP, [290000,390000], A_3 \rangle$
$A_4$ = Nivel alto de crecimiento poblacional (NACP)	$\langle NACP, [390000,490000], A_4 \rangle$
$A_5$ = Nivel muy alto de crecimiento poblacional (NMACP)	$\langle NMACP, [490000,590000], A_5 \rangle$

Donde:

- El valor lingüístico “Nivel bajo de crecimiento poblacional” está dado por la variable difusa  $\langle NBCP, [90000,190000], A_1 \rangle$ , donde  $A_1$  es el conjunto difuso definido en el dominio  $[90000,190000]$  del universo de discurso  $U$ .
- El valor lingüístico “Nivel invariante de crecimiento poblacional” está dado por la variable difusa  $\langle NICP, [190000,290000], A_2 \rangle$ ,  $A_2$  es el conjunto difuso definido en el dominio  $[190000,290000]$  del universo de discurso  $U$ .
- El valor lingüístico “Nivel moderado de crecimiento poblacional” está dado por la variable difusa  $\langle NMCP, [290000,390000], A_3 \rangle$ ,  $A_3$  es el conjunto difuso definido en el dominio  $[290000,390000]$  del universo de discurso  $U$ .



- El valor lingüístico “Nivel alto de crecimiento poblacional” está dado por la variable difusa  $\langle \text{NACP}, [390000, 490000], A_4 \rangle$ ,  $A_4$  es el conjunto difuso definido en el dominio  $[390000, 490000]$  del universo de discurso  $U$ .
- El valor lingüístico “Nivel muy alto de crecimiento poblacional” este dado por la variable difusa  $\langle \text{NMACP}, [490000, 590000], A_5 \rangle$ ,  $A_5$  es el conjunto difuso definido en el dominio  $[490000, 590000]$  del universo de discurso  $U$ .

#### 4.1.4. Fuzzificación de los datos de entrada o conversión de los valores numéricos en valores difusos.

Cada conjunto difuso  $A_i (i = 1, \dots, 5)$  definido mediante:

$$A_i = \{ \mu_{A_i}(u_j) / u_j \text{ donde } \mu_{A_i}(u_j) \in [0, 1], u_j \in R, j = 1, \dots, 5 \} \text{ con el grado de pertenencia } \mu_{A_i}(u_j) \text{ de } u_j.$$

Los conjuntos difusos  $A_1, \dots, A_5$  es definido en el universo de discurso  $U$  por la siguiente fórmula:

$$\mu_{A_i}(u_j) = \frac{1}{1 + [C(u - u_{i_m})]^2}$$

Donde:

$U$ : variación poblacional de la tabla 1

$u_{i_m}$ : puntos medio de los intervalos

$C$ : es una constante que asegura la conversión de los valores definidos en los valores difusos o su pertenencia al intervalo. ( $C = 0.0001$ )

En la tabla 4 se muestra los grados de pertenencia de cada elemento a los respectivos conjuntos difusos.

**Tabla 4.** Grado de pertenencia de cada elemento a los respectivos conjuntos difusos para el período 1951-2050.

Año	$\mu_{A_1}(u_1)/u_1$	$\mu_{A_2}(u_2)/u_2$	$\mu_{A_3}(u_3)/u_3$	$\mu_{A_4}(u_4)/u_4$	$\mu_{A_5}(u_5)/u_5$
1951	0.026/ $u_1$	0.064/ $u_2$	0.005/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
1952	0.021/ $u_1$	0.088/ $u_2$	0.006/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
1953	0.017/ $u_1$	0.138/ $u_2$	0.006/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
1954	0.014/ $u_1$	0.263/ $u_2$	0.007/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
1955	0.012/ $u_1$	0.644/ $u_2$	0.009/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
1956	0.010/ $u_1$	0.986/ $u_2$	0.010/ $u_3$	0.003/ $u_4$	0.001/ $u_5$
1957	0.008/ $u_1$	0.547/ $u_2$	0.012/ $u_3$	0.003/ $u_4$	0.001/ $u_5$
1958	0.007/ $u_1$	0.235/ $u_2$	0.015/ $u_3$	0.003/ $u_4$	0.001/ $u_5$
1959	0.006/ $u_1$	0.113/ $u_2$	0.019/ $u_3$	0.003/ $u_4$	0.001/ $u_5$
1960	0.005/ $u_1$	0.061/ $u_2$	0.026/ $u_3$	0.004/ $u_4$	0.001/ $u_5$
1961	0.004/ $u_1$	0.037/ $u_2$	0.040/ $u_3$	0.005/ $u_4$	0.002/ $u_5$
1962	0.004/ $u_1$	0.025/ $u_2$	0.067/ $u_3$	0.005/ $u_4$	0.002/ $u_5$
1963	0.003/ $u_1$	0.019/ $u_2$	0.117/ $u_3$	0.006/ $u_4$	0.002/ $u_5$
1964	0.003/ $u_1$	0.015/ $u_2$	0.213/ $u_3$	0.007/ $u_4$	0.002/ $u_5$
1965	0.003/ $u_1$	0.013/ $u_2$	0.383/ $u_3$	0.008/ $u_4$	0.002/ $u_5$
1966	0.003/ $u_1$	0.011/ $u_2$	0.702/ $u_3$	0.009/ $u_4$	0.002/ $u_5$
1967	0.002/ $u_1$	0.010/ $u_2$	0.994/ $u_3$	0.010/ $u_4$	0.003/ $u_5$
1968	0.002/ $u_1$	0.008/ $u_2$	0.576/ $u_3$	0.012/ $u_4$	0.003/ $u_5$
1969	0.002/ $u_1$	0.007/ $u_2$	0.257/ $u_3$	0.014/ $u_4$	0.003/ $u_5$
1970	0.002/ $u_1$	0.006/ $u_2$	0.129/ $u_3$	0.018/ $u_4$	0.003/ $u_5$
1971	0.002/ $u_1$	0.005/ $u_2$	0.072/ $u_3$	0.024/ $u_4$	0.004/ $u_5$
1972	0.002/ $u_1$	0.005/ $u_2$	0.046/ $u_3$	0.032/ $u_4$	0.004/ $u_5$
1973	0.002/ $u_1$	0.004/ $u_2$	0.034/ $u_3$	0.044/ $u_4$	0.005/ $u_5$
1974	0.001/ $u_1$	0.004/ $u_2$	0.027/ $u_3$	0.059/ $u_4$	0.005/ $u_5$
1975	0.001/ $u_1$	0.004/ $u_2$	0.023/ $u_3$	0.078/ $u_4$	0.006/ $u_5$
1976	0.001/ $u_1$	0.003/ $u_2$	0.019/ $u_3$	0.112/ $u_4$	0.006/ $u_5$
1977	0.001/ $u_1$	0.003/ $u_2$	0.016/ $u_3$	0.187/ $u_4$	0.007/ $u_5$
1978	0.001/ $u_1$	0.003/ $u_2$	0.014/ $u_3$	0.306/ $u_4$	0.007/ $u_5$
1979	0.001/ $u_1$	0.003/ $u_2$	0.012/ $u_3$	0.468/ $u_4$	0.008/ $u_5$
1980	0.001/ $u_1$	0.003/ $u_2$	0.012/ $u_3$	0.630/ $u_4$	0.009/ $u_5$
1981	0.001/ $u_1$	0.003/ $u_2$	0.011/ $u_3$	0.851/ $u_4$	0.009/ $u_5$
1982	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.010/ $u_3$	0.999/ $u_4$	0.010/ $u_5$
1983	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.009/ $u_3$	0.867/ $u_4$	0.011/ $u_5$
1984	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.009/ $u_3$	0.679/ $u_4$	0.011/ $u_5$
1985	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.008/ $u_3$	0.547/ $u_4$	0.012/ $u_5$
1986	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.008/ $u_3$	0.351/ $u_4$	0.013/ $u_5$
1987	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.007/ $u_3$	0.225/ $u_4$	0.015/ $u_5$
1988	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.007/ $u_3$	0.198/ $u_4$	0.015/ $u_5$

Año	$\mu_{A_1}(u_1)/u_1$	$\mu_{A_2}(u_2)/u_2$	$\mu_{A_3}(u_3)/u_3$	$\mu_{A_4}(u_4)/u_4$	$\mu_{A_5}(u_5)/u_5$
1989	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.007/ $u_3$	0.229/ $u_4$	0.015/ $u_5$
1990	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.008/ $u_3$	0.365/ $u_4$	0.013/ $u_5$
1991	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.009/ $u_3$	0.617/ $u_4$	0.012/ $u_5$
1992	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.009/ $u_3$	0.812/ $u_4$	0.011/ $u_5$
1993	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.010/ $u_3$	0.963/ $u_4$	0.010/ $u_5$
1994	0.001/ $u_1$	0.003/ $u_2$	0.010/ $u_3$	0.996/ $u_4$	0.010/ $u_5$
1995	0.001/ $u_1$	0.003/ $u_2$	0.011/ $u_3$	0.916/ $u_4$	0.009/ $u_5$
1996	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.009/ $u_3$	0.696/ $u_4$	0.011/ $u_5$
1997	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.007/ $u_3$	0.278/ $u_4$	0.014/ $u_5$
1998	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.009/ $u_3$	0.636/ $u_4$	0.012/ $u_5$
1999	0.001/ $u_1$	0.003/ $u_2$	0.015/ $u_3$	0.216/ $u_4$	0.007/ $u_5$
2000	0.002/ $u_1$	0.005/ $u_2$	0.070/ $u_3$	0.024/ $u_4$	0.004/ $u_5$
2001	0.003/ $u_1$	0.014/ $u_2$	0.291/ $u_3$	0.007/ $u_4$	0.002/ $u_5$
2002	0.005/ $u_1$	0.048/ $u_2$	0.031/ $u_3$	0.004/ $u_4$	0.002/ $u_5$
2003	0.007/ $u_1$	0.293/ $u_2$	0.014/ $u_3$	0.003/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2004	0.010/ $u_1$	0.939/ $u_2$	0.009/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2005	0.012/ $u_1$	0.513/ $u_2$	0.008/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2006	0.019/ $u_1$	0.116/ $u_2$	0.006/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2007	0.043/ $u_1$	0.035/ $u_2$	0.004/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2008	0.064/ $u_1$	0.026/ $u_2$	0.004/ $u_3$	0.001/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2009	0.047/ $u_1$	0.032/ $u_2$	0.004/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2010	0.021/ $u_1$	0.087/ $u_2$	0.006/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2011	0.019/ $u_1$	0.119/ $u_2$	0.006/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2012	0.022/ $u_1$	0.086/ $u_2$	0.006/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2013	0.013/ $u_1$	0.417/ $u_2$	0.008/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2014	0.005/ $u_1$	0.075/ $u_2$	0.023/ $u_3$	0.004/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2015	0.002/ $u_1$	0.008/ $u_2$	0.605/ $u_3$	0.012/ $u_4$	0.003/ $u_5$
2016	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.007/ $u_3$	0.229/ $u_4$	0.015/ $u_5$
2017	0.001/ $u_1$	0.001/ $u_2$	0.002/ $u_3$	0.008/ $u_4$	0.445/ $u_5$
2018	0.000/ $u_1$	0.001/ $u_2$	0.002/ $u_3$	0.005/ $u_4$	0.041/ $u_5$
2019	0.001/ $u_1$	0.001/ $u_2$	0.002/ $u_3$	0.006/ $u_4$	0.105/ $u_5$
2020	0.001/ $u_1$	0.002/ $u_2$	0.004/ $u_3$	0.033/ $u_4$	0.046/ $u_5$
2021	0.001/ $u_1$	0.003/ $u_2$	0.020/ $u_3$	0.096/ $u_4$	0.006/ $u_5$
2022	0.002/ $u_1$	0.007/ $u_2$	0.179/ $u_3$	0.016/ $u_4$	0.003/ $u_5$
2023	0.003/ $u_1$	0.012/ $u_2$	0.459/ $u_3$	0.008/ $u_4$	0.002/ $u_5$
2024	0.003/ $u_1$	0.019/ $u_2$	0.118/ $u_3$	0.006/ $u_4$	0.002/ $u_5$
2025	0.003/ $u_1$	0.019/ $u_2$	0.112/ $u_3$	0.006/ $u_4$	0.002/ $u_5$
2026	0.003/ $u_1$	0.020/ $u_2$	0.099/ $u_3$	0.006/ $u_4$	0.002/ $u_5$
2027	0.004/ $u_1$	0.029/ $u_2$	0.052/ $u_3$	0.005/ $u_4$	0.002/ $u_5$
2028	0.005/ $u_1$	0.044/ $u_2$	0.034/ $u_3$	0.004/ $u_4$	0.002/ $u_5$
2029	0.005/ $u_1$	0.066/ $u_2$	0.025/ $u_3$	0.004/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2030	0.006/ $u_1$	0.099/ $u_2$	0.020/ $u_3$	0.003/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2031	0.007/ $u_1$	0.161/ $u_2$	0.017/ $u_3$	0.003/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2032	0.008/ $u_1$	0.325/ $u_2$	0.013/ $u_3$	0.003/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2033	0.009/ $u_1$	0.752/ $u_2$	0.011/ $u_3$	0.003/ $u_4$	0.001/ $u_5$

Año	$\mu_{A_1}(u_1)/u_1$	$\mu_{A_2}(u_2)/u_2$	$\mu_{A_3}(u_3)/u_3$	$\mu_{A_4}(u_4)/u_4$	$\mu_{A_5}(u_5)/u_5$
2034	0.011/ $u_1$	0.911/ $u_2$	0.009/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2035	0.013/ $u_1$	0.400/ $u_2$	0.008/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2036	0.016/ $u_1$	0.178/ $u_2$	0.007/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2037	0.020/ $u_1$	0.097/ $u_2$	0.006/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2038	0.027/ $u_1$	0.060/ $u_2$	0.005/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2039	0.036/ $u_1$	0.041/ $u_2$	0.005/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2040	0.051/ $u_1$	0.030/ $u_2$	0.004/ $u_3$	0.002/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2041	0.076/ $u_1$	0.023/ $u_2$	0.004/ $u_3$	0.001/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2042	0.124/ $u_1$	0.018/ $u_2$	0.003/ $u_3$	0.001/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2043	0.242/ $u_1$	0.015/ $u_2$	0.003/ $u_3$	0.001/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2044	0.580/ $u_1$	0.012/ $u_2$	0.003/ $u_3$	0.001/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2045	0.989/ $u_1$	0.010/ $u_2$	0.002/ $u_3$	0.001/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2046	0.480/ $u_1$	0.008/ $u_2$	0.002/ $u_3$	0.001/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2047	0.209/ $u_1$	0.007/ $u_2$	0.002/ $u_3$	0.001/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2048	0.107/ $u_1$	0.006/ $u_2$	0.002/ $u_3$	0.001/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2049	0.062/ $u_1$	0.005/ $u_2$	0.002/ $u_3$	0.001/ $u_4$	0.001/ $u_5$
2050	0.040/ $u_1$	0.004/ $u_2$	0.002/ $u_3$	0.001/ $u_4$	0.000/ $u_5$

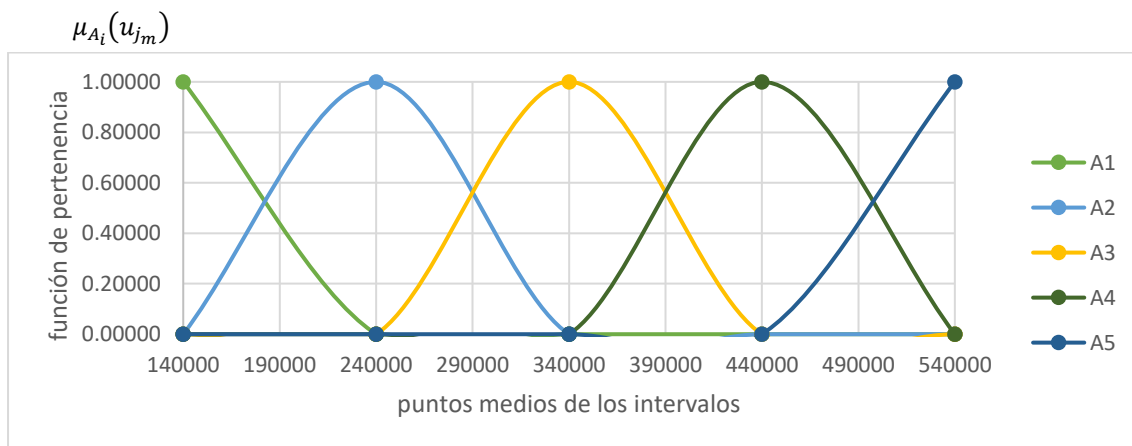
Nota: La tabla describe la dinámica, variación y los valores de membresía del crecimiento demográfico para el período 1951-2050.

En la fórmula: 
$$\mu_{A_i}(u_j) = \frac{1}{1+[c(u-u_{i_m})]^2}$$

Si se acepta el valor de  $\mathcal{U}$  como punto medio del intervalo correspondiente, el conjunto difuso  $A_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ), se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{(1.00000/u_{1_m}) \ (0.00010/u_{2_m}) \ (0.00002/u_{3_m}) \ (0.00001/u_{4_m}) \ 0.00001/u_{5_m}\} \\
 A_2 &= \{(0.00010/u_{1_m}) \ (1.00000/u_{2_m}) \ (0.00010/u_{3_m}) \ 0.00002/u_{4_m}) \ 0.00001/u_{5_m}\} \\
 A_3 &= \{(0.00002/u_{1_m}) \ (0.00010/u_{2_m}) \ (1.00000/u_{3_m}) \ 0.00010/u_{4_m}) \ 0.00002/u_{5_m}\} \\
 A_4 &= \{(0.00001/u_{1_m}) \ (0.00002/u_{2_m}) \ (0.00010/u_{3_m}) \ (1.00000/u_{4_m}) \ 0.00010/u_{5_m}\} \\
 A_5 &= \{(0.00001/u_{1_m}) \ (0.00001/u_{2_m}) \ (0.00002/u_{3_m}) \ 0.00010/u_{4_m}) \ (1.00000/u_{5_m})\}
 \end{aligned}$$

**Figura 5.** Función de pertenencia de los valores del conjunto difuso de la variable lingüística “Desarrollo de la población”



La figura 5, muestra un ejemplo del crecimiento de las funciones de pertenencia continuas de los conjuntos difusos  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  que representan los valores de la variable lingüística “Desarrollo de la población”.

#### 4.1.5. Definición del valor pronosticado $F(t)$

Se calcula la matriz de relaciones difusas  $R(t)$  mediante el cual se da un pronóstico del crecimiento de la población en el año siguiente. Se selecciona  $w = 5$  en este caso y definimos la matriz de operaciones  $O^5(t)$  (que es la matriz de variación difusa en la población total sobre los años  $t - 2, t - 3, t - 4, t - 5$ ) y la matriz de criterios  $K(t)$  (que es la matriz de variación difusa para el año  $t - 1$ ). Así para  $w = 5$ , se utilizan los datos de los 6 años anteriores (se debe conocer la población total del año  $(t - 6)$  para encontrar la variación del año  $(t - 5)$ ).

Posterior a esto se halla  $R(t) = O^5(t) \circ K(t)$  que es una relación difusa y se denomina modelo de primer orden de  $F(t)$  donde  $\circ$  es una operación  $\min(\cap)$ ; luego se define el valor pronosticado  $F(t)$  para el año  $t$  en forma difusa:

$$F(t) = [\max(R_{11}, R_{21}, \dots, R_{i1}) \max(R_{12}, R_{22}, \dots, R_{i2}) \dots \max(R_{1j}, R_{2j}, \dots, R_{ij})],$$

Para pronosticar la población total para el año 1956 se establecerá la matriz de operaciones:

$$O^5(t) = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 0.026 & 0.064 & 0.005 & 0.002 & 0.001 \\ 0.021 & 0.088 & 0.006 & 0.002 & 0.001 \\ 0.017 & 0.138 & 0.006 & 0.002 & 0.001 \\ 0.014 & 0.263 & 0.007 & 0.002 & 0.001 \end{array} \right| \begin{array}{l} t - 5 \\ t - 4 \\ t - 3 \\ t - 2 \end{array} \end{array}$$

La matriz de criterios:

$$K(t) = \left| \begin{array}{ccccc} 0.012 & 0.644 & 0.009 & 0.002 & 0.001 \end{array} \right| t - 1$$

Se calcula la matriz de relaciones difusas  $R(t)$ ;  $\circ$  es una operación  $\min(\cap)$ , modelo de primer orden de  $F(t)$ .

$$R(t) = O^5(t) \circ K(t) = \left| \begin{array}{ccccc} 0.012 & 0.064 & 0.005 & 0.002 & 0.001 \\ 0.012 & 0.088 & 0.006 & 0.002 & 0.001 \\ 0.012 & 0.138 & 0.006 & 0.002 & 0.001 \\ 0.012 & 0.263 & 0.007 & 0.002 & 0.001 \end{array} \right|$$

Luego se define el valor pronosticado  $F(t)$  para el año 1956 en forma difusa:

$$F(1956) = \left| \begin{array}{ccccc} 0.012 & 0.263 & 0.007 & 0.002 & 0.001 \end{array} \right|$$

Con el mismo procedimiento se halla el valor pronosticado  $F(t)$  para los años

$$t = 1957, \dots, 2050$$

#### 4.1.6. Defuzzificación de los resultados (proceso inverso de la fuzzificación)

Para defuzzificar los resultados obtenidos o conversión de los valores difusos en

valores cuantitativos se propone la fórmula: 
$$V(t) = \frac{\sum_{i=1}^5 \mu_{A_i}(u_j) \times u_{i_m}}{\sum_{i=1}^5 \mu_{A_i}(u_j)}$$

Donde:

$\mu_{A_i}(u_j)$ : es el valor calculado de función de pertenencia para el año de pronóstico  $t$ .

$u_{i_m}$  : son los puntos medios de los intervalos.

Para estimar la población total pronosticada para el año 1956:

Se calcula el crecimiento esperado:  $V(1956) = 241047.698$

Y finalmente se calcula la población pronosticada para el año 1956:

$$N(1956) = 241047.698 + 8857699 = 9098746.698$$

Los resultados se muestran en la tabla 5.

**Tabla 5.** Población peruana proyectada con series de tiempo difusas ( $\hat{p}$ )

	AÑO	POBLACION OBSERVADA ( $p$ )	POBLACION PROYECTADA CON SERIES DE TIEMPO DIFUSAS ( $\hat{p}$ )	$R_p$ ERROR RELATIVO	$E_p$ ERROR ABSOLUTO
<b>RETROSPECTIVA</b>	1956	9098885	9098746.698	0.000015200	19127.49176
	1957	9347986	9339894.860	0.000865549	65466551.05
	1958	9606047	9589780.073	0.001693405	264612898.6
	1959	9874125	9851422.430	0.002299198	515406673.9
	1960	10153262	10127507.170	0.002536607	663311294.1
	1961	10444555	10420585.520	0.002294926	574536019.1
	1962	10747306	10731458.080	0.001474595	251156567.1
	1963	11059880	11054600.120	0.000477390	27877120.44

AÑO	POBLACION OBSERVADA ( $p$ )	POBLACION PROYECTADA CON SERIES DE TIEMPO DIFUSAS ( $\hat{p}$ )	$R_p$ ERROR RELATIVO	$E_p$ ERROR ABSOLUTO
1964	11380635	11382741.100	0.000185060	4435671.455
1965	11707947	11712815.370	0.000415818	23701070.26
1966	12041432	12044790.030	0.000278873	11276382.13
1967	12382179	12380347.360	0.000147926	3354921.192
1968	12730755	12760900.730	0.002367945	908765170
1969	13087738	13071101.290	0.001271168	276780102.8
1970	13453692	13429789.620	0.001776641	571323673
1971	13829543	13800206.550	0.002121288	860627048.3
1972	14214908	14184969.160	0.002106158	896334317.5
1973	14608406	14583727.190	0.001689357	609043517.8
1974	15008648	14992297.820	0.001089384	267328298
1975	15414250	15406231.840	0.000520179	64290954.12
1976	15826152	15822709.210	0.000217538	11852824.65
1977	16245280	16243500.290	0.000109552	3167368.124
1978	16670224	16671049.310	0.000049508	681136.1077
1979	17099568	17102466.460	0.000169505	8401098.972
1980	17531898	17535319.680	0.000195169	11707897.67
1981	17967707	17969378.360	0.000093020	2793446.312
1982	18407934	18406044.370	0.000102653	3570697.226
1983	18851845	18846899.860	0.000262316	24454412.72
1984	19298720	19291027.650	0.000398594	59172179.67
1985	19747819	19737892.330	0.000502672	98538846.93
1986	20201403	20187006.460	0.000712651	207260420.5
1987	20659953	20640559.750	0.000938688	376098144.7
1988	21120089	21099557.430	0.000972134	421545194.9
1989	21578440	21560504.880	0.000831159	321668665.2
1990	22031627	22018655.260	0.000588778	168265994.8
1991	22479500	22471089.290	0.000374150	70740039.17
1992	22924304	22918585.260	0.000249462	32703991.52
1993	23366275	23363462.700	0.000120357	7909012.001
1994	23805630	23805472.190	0.000006629	24903.55197
1995	24242600	24244825.590	0.000091805	4953231.519
1996	24689213	24681635.050	0.000306934	57425300.7
1997	25145317	25128424.340	0.000671801	285361901.2
1998	25592876	25584217.440	0.000338319	74970591.2
1999	26013829	26032148.200	0.000704210	335593106.9
2000	26390142	26448748.920	0.002220788	3434771010
2001	26714547	26785157.070	0.002643132	4985781705
2002	26999085	27057750.690	0.002172877	3441662908
2003	27254632	27315850.240	0.002246159	3747673450
2004	27492091	27520960.660	0.001050108	833457085.6
2005	27722342	27735325.270	0.000468332	168565392.8

	AÑO	POBLACION OBSERVADA ( $p$ )	POBLACION PROYECTADA CON SERIES DE TIEMPO DIFUSAS ( $\hat{p}$ )	$R_p$ ERROR RELATIVO	$E_p$ ERROR ABSOLUTO
		2006	27934784	27963365.930	0.001023166
	2007	28122158	28175241.220	0.001887594	2817827762
	2008	28300372	28347396.590	0.001661624	2211311708
	2009	28485319	28495032.250	0.000340992	94347306.04
	2010	28692915	28681410.3230	0.000400959	132357588.5
	2011	28905725	28924921.370	0.000664103	368500677.5
	2012	29113162	29140076.320	0.000924473	724380888.6
	2013	29341346	29345017.290	0.000125123	13478372.87
	2014	29616414	29581427.260	0.001181329	1224072141
	2015	29964499	29867317.110	0.003243234	9444320154
	2016	30422831	30287627.500	0.004444146	18279986620
	2017	30973992	30815925.190	0.005103211	24985116207
	2018	31562130	31446613.780	0.003659963	13343997934
	2019	32131400	32077066.720	0.001690972	2952105776
	2020	32625948	32658503.810	0.000997850	1059880580
	2021	33035304	33108833.710	0.002225792	5406617827
	2022	33396698	33466805.890	0.002099246	4915115794
	2023	33725844	33772726.580	0.001390109	2197976672
PROSPECTIVA	2024	34038457	34066725.120	0.000830476	799086703.3
	2025	34350244	34372767.970	0.000655715	507329072.8
	2026	34660114	34679346.360	0.000554885	369883721.1
	2027	34957600	34987632.820	0.000859121	901970226.1
	2028	35244330	35274964.270	0.000869197	938458366.3
	2029	35521943	35543289.130	0.000600928	455657252.3
	2030	35792079	35803032.300	0.000306026	119974854.2
	2031	36054888	36058952.480	0.000112730	16519958.69
	2032	36309290	36311458.210	0.000059715	4701145.726
	2033	36555034	36558103.810	0.000083978	9423729.987
	2034	36791909	36798568.990	0.000181018	44355434.6
	2035	37019661	37033014.060	0.000360702	178304090.2
	2036	37238190	37260807.630	0.000607377	511557172.9
	2037	37447651	37478628.820	0.000827230	959625323.1
	2038	37648215	37684666.730	0.000968219	1328728661
	2039	37840036	37877921.620	0.001001205	1435320347
	2040	38023290	38058262.200	0.000919757	1223054491
	2041	38198236	38226726.140	0.000745850	811688004.3
	2042	38364756	38385520.010	0.000541226	431144296
	2043	38522478	38536679.250	0.000368649	201675615.1
	2044	38670990	38681268.010	0.000265781	105637585.7
	2045	38809920	38820057.260	0.000261203	102764038.1
	2046	38939517	38953752.350	0.000365576	202645322.4
	2047	39060054	39083199.670	0.000592566	535722199.1



	AÑO	POBLACION OBSERVADA ( $p$ )	POBLACION PROYECTADA CON SERIES DE TIEMPO DIFUSAS ( $\hat{p}$ )	$R_p$ ERROR RELATIVO	$E_p$ ERROR ABSOLUTO
	2048	39171129	39207487.340	0.000928192	1321928755
	2049	39272354	39323817.030	0.001310414	2648443220
	2050	39363351	39431252.810	0.001725001	4610655623

$$TMEP = \frac{\sum \frac{|p - \hat{p}|}{|p|}}{n} = 0.00106$$

En la tabla 5, se observa la población proyectada ( $\hat{p}$ ) con series de tiempo difusa, el valor de la población observada ( $p$ ) es del orden de magnitud de  $10^6$ , el error absoluto para cada año es grande y el error relativo para cada año es pequeño, en este caso la población pronosticada ( $\hat{p}$ ) con series de tiempo difusas, es considerada una buena aproximación, contando con una tasa media de error de pronóstico de 0.00106.

**Tabla 6.** Comparación de pronóstico de la población peruana entre los modelos de pronóstico: series de tiempo difusas (STD), modelo lineal (ML) y el modelo logístico (MLOGI).

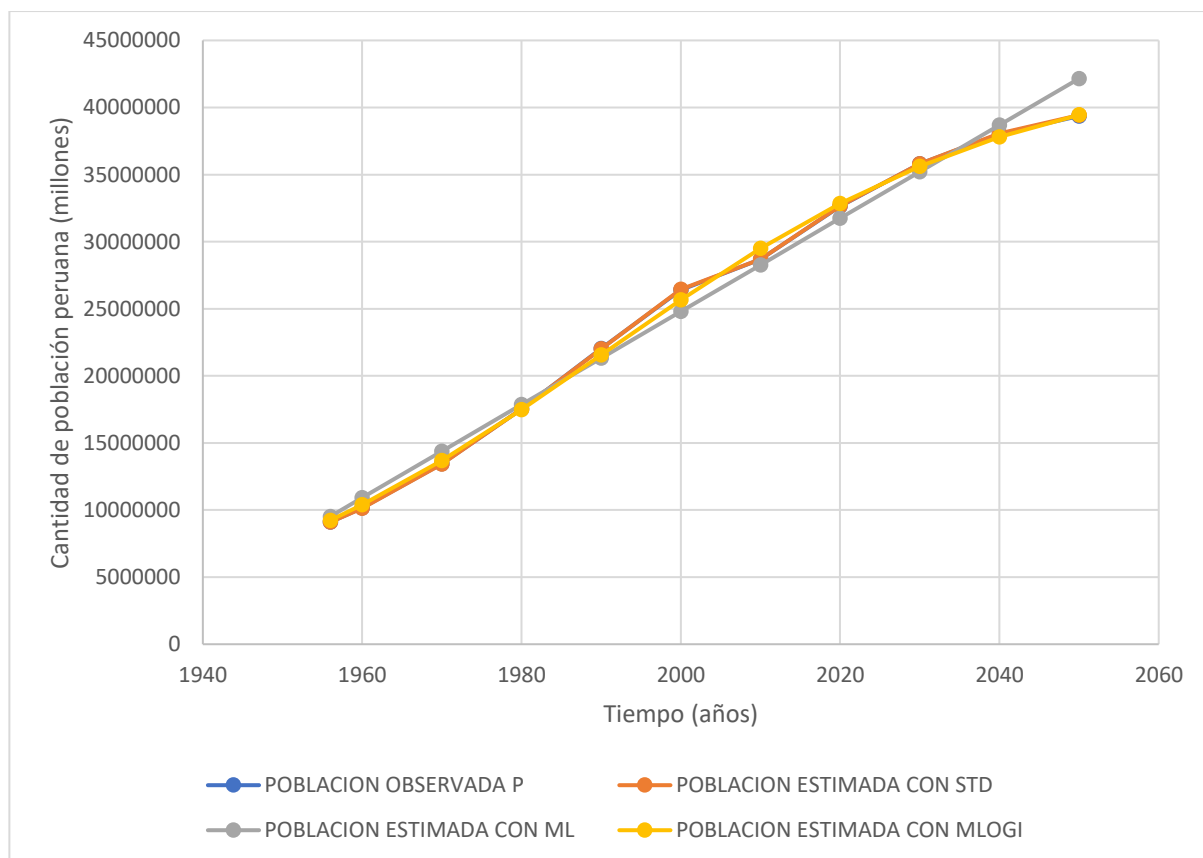
AÑO	POBLACION OBSERVADA ( $p$ )	POBLACION PRONOSTICADA CON SERIES DE TIEMPO DIFUSAS (STD)	POBLACION PRONOSTICADA CON EL MODELO LINEAL (ML)	POBLACION PRONOSTICADA CON EL MODELO LOGISTICO (MLOGI)	ERROR RELATIVO (STD)	ERROR RELATIVO (ML)	ERROR RELATIVO (MLOGI)	
1956	9098885	9098746.7	9519545.85	9228338.84	1.51999E-05	0.04623213	0.01422744	
1960	10153262	10127507.2	10908233.8	10383666.8	0.002536607	0.07435756	0.02269269	
1970	13453692	13429789.6	14379953.7	13681000.9	0.001776641	0.06884814	0.01689565	
1980	17531898	17535319.7	17851673.5	17473695.9	0.000195169	0.01823964	0.00331978	
1990	22031627	22018655.3	21323393.4	21558828.5	0.000588778	0.03214622	0.02145999	
2000	26390142	26448748.9	24795113.3	25659112.7	0.002220788	0.06044032	0.02770085	
2010	28692915	28681410.3	28266833.2	29493196.6	0.000400959	0.01484972	0.02789126	
2020	32625948	32658503.8	31738553	32848109.9	0.00099785	0.02719906	0.00680936	
2030	35792079	35803032.3	35210272.9	35617428.9	0.000306026	0.01625516	0.00487957	
2040	38023290	38058262.2	38681992.8	37795402	0.000919757	0.01732367	0.00599338	
2050	39363351	39431252.8	42153712.6	39444028	0.001725001	0.0708873	0.00204955	
					<b>TMEP</b>	<b>0.00106207</b>	<b>0.04061627</b>	<b>0.01399268</b>
					<b>TMEP %</b>	<b>0.106207048</b>	<b>4.06162663</b>	<b>1.39926845</b>

La tabla 6, muestra la comparación entre los pronósticos con:

- series de tiempo difusas
- modelo lineal  $P^*(t) = 9172373.865 + 347171.987t$
- modelo logístico  $P^{**}(t) = \frac{43546446.741}{1+3.863e^{-0.03805t}}$

donde se observa que tasa media de error de pronóstico con series de tiempo difusas es de 0.106 %, la población pronosticada con el modelo lineal  $P^*(t)$  presenta una tasa media de error de pronóstico de 4.06% y el modelo logístico  $P^{**}(t)$  tiene una tasa media de error de pronóstico de 1.40%, concluyendo que el método de pronóstico con series de tiempo difusas presenta una mayor precisión con una tasa media de error de pronóstico de 0.106%.

**Figura 6.** Comparación de pronóstico de la población peruana entre los modelos de pronóstico: series de tiempo difusas (STD), modelo lineal (ML) y el modelo logístico (MLOGI.)



En la figura 6 se compara los modelos de pronóstico para la población peruana: modelo de proyección poblacional con series de tiempo difusas (STD), modelo lineal (ML) y el modelo logístico (MLOGI). Donde el modelo de proyección poblacional con series de tiempo difusas presenta una tasa media de error de pronóstico de 0.106%, encontrando menor distancia con respecto a la población observada.

## 4.2. Discusión

los resultados del pronóstico de la población peruana con series de tiempo difusas han demostrado que tienen una buena aproximación a diferencia del modelo lineal y el modelo logístico, el modelo de proyección poblacional con series de tiempo difusas, toma en cuenta la tendencia de población en estudio, logrando una mayor precisión frente a los modelos lineales y modelos logísticos con una tasa media de error de pronóstico de 0.106%, demostrando que el pronóstico de la población con las series de tiempo difusas logra pronósticos más precisos para cualquier horizonte lejano, coincidiendo con Stevenson y Porter (2009), quienes concluyen que el método de series de tiempo difusas da como resultado una mayor precisión en los pronósticos que los modelos existentes. Song y Chissom (1993) mencionan la superioridad en los pronósticos con series de tiempo difusas, Abbasov y Mamedova, 2003; Argote-Cusi, 2018, observan que las series de tiempo difusas permiten tener en cuenta la tendencia, la no linealidad de la población y tasas de crecimiento, logrando pronósticos más precisos, Sasu (2010) concluye que las series de tiempo difusas ayudan a realizar cálculos de pronóstico para cualquier perspectiva lejana, concordando con los resultados obtenidos en este estudio.

**CAPITULO V**  
**CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

## 5.1. Conclusiones

Se concluye que se logró el objetivo de esta investigación que es modelar la proyección poblacional con series de tiempo difusas obteniendo el modelo de proyección de la población peruana (variable lingüística):  $\langle NBCP, [90000, 190000], A_1 \rangle$  más  $\langle NICP, [190000, 290000], A_2 \rangle$  más  $\langle NMCP, [290000, 390000], A_3 \rangle$  más  $\langle NACP, [390000, 490000], A_4 \rangle$  más  $\langle NMACP, [490000, 590000], A_5 \rangle$ , definiendo el universo de discurso  $U = [90000, 590000]$  para luego ser segmentadas en intervalos de igual longitud  $u_1 = [90000, 190000]$ ,  $u_2 = [190000, 290000]$ ,  $u_3 = [290000, 390000]$ ,  $u_4 = [390000, 490000]$ ,  $u_5 = [490000, 590000]$ , determinando los conjuntos difusos  $A_1 =$  Nivel bajo de crecimiento poblacional (NBCP),  $A_2 =$  Nivel invariante de crecimiento poblacional (NICP),  $A_3 =$  Nivel moderado de crecimiento poblacional (NMCP),  $A_4 =$  Nivel alto de crecimiento poblacional (NACP),  $A_5 =$  Nivel muy alto de crecimiento poblacional (NMACP), así, determinar las variables lingüísticas:  $\langle NBCP, [90000, 190000], A_1 \rangle$ ,  $\langle NICP, [190000, 290000], A_2 \rangle$ ,  $\langle NMCP, [290000, 390000], A_3 \rangle$ ,  $\langle NACP, [390000, 490000], A_4 \rangle$ ,  $\langle NMACP, [490000, 590000], A_5 \rangle$ , y calcular los grados de pertenencia de cada elemento a los respectivos conjuntos difusos, así, se definió el valor difuso de pronóstico  $F(t)$  para cada año; por último se defuzzificó para obtener la población pronosticada para cada año, demostrando que el modelo de proyección poblacional con series de tiempo difusas tiene mayor precisión tomando en cuenta en el proceso la tendencia de la población en estudio y se logra pronósticos más precisos para cualquier horizonte lejano.

## **5.2. Recomendaciones**

Se recomienda elaborar un algoritmo para desarrollar un software adecuado a la modelación de pronósticos poblacionales con series de tiempo difusas, a su vez pueden ser usadas en los campos de las ingenierías, biología, ciencias sociales, medicina y otros.

El Perú actualmente realiza las proyecciones poblacionales a través del INEI siguiendo las recomendaciones de las Naciones Unidas, con la asesoría de expertos del Centro Latinoamericano de Demografía, por lo que se recomienda a la Universidad Nacional del Santa , contar con un instituto de investigación en el área de proyecciones poblacionales, proponiendo otros métodos de proyección y contar con información disponible para la investigación y política pública, tener lazos con otras universidades de América Latina y el Caribe dedicadas a esta labor.

## Referencias Bibliográficas

- Abbasov, A., y Mamedova, M. (2003). Application of fuzzy time series to population forecasting. *Vienna University of Technology*, 12, 545-552.
- Aluja, J. (2000). *Génesis de una teoría de la incertidumbre*. Fundación General de la Universidad Autónoma de Madrid.
- Argote-Cusi, M. (2018). El uso de lógica difusa en proyecciones de población: el caso de México. *Papeles de población*, 24(95), 273-301.
- Chen, S.-M., y Hsu, C.-C. (2004). A new method to forecast enrollments using fuzzy time series. *International Journal of Applied Science and Engineering*, 2(3), 234-244.
- Chen, S.-M., y Hwang, J.-R. (2000). Temperature prediction using fuzzy time series. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 30(2), 263-275.
- García, J., Sánchez, A., Hidalgo, N., y Benavides, H. (2019). Perú: Estimaciones y proyecciones de la población Nacional, 1950-2070. *Boletín de Análisis Demográfico*(38).
- Jilani, T., Burney, S., y Ardil, C. (2008). Multivariate high order fuzzy time series forecasting for car road accidents. *International Journal of Computer and Information Engineering*, 2(6), 2038-2043.
- Mathews, J. y Fink, K. (2000). *Métodos Numéricos*. Madrid: Prentice Hall.
- Rincón, M. (1989). Teoría y métodos para la preparación de estimaciones y proyecciones de población: insumos para la planificación.
- Sasu, A. (2010). An application of fuzzy time series to the Romanian population. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Mathematics, Informatics, Physics. Series III*, 3, 125.



- Song, Q., y Chissom, B. (1993). Forecasting enrollments with fuzzy time series—Part I. *Fuzzy sets and systems*, 54(1), 1-9.
- Song, Q., y Chissom, B. (1994). Forecasting enrollments with fuzzy time series—Part II. *Fuzzy sets and systems*, 62(1), 1-8.
- Stevenson, M., Porter, J. (1972). Fuzzy time series forecasting using percentage change as the universe of discourse. *Change*, 1971(3.89), 464-467.
- Stevenson, M., Porter, J. (1972). Fuzzy time series forecasting using percentage change as the universe of discourse. *Change*, 1971(3.89), 464-467.
- Tabares, H., y Hernández, J. (2009). Aproximación por lógica difusa de la serie de tiempo: demanda diaria de energía eléctrica. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*(47), 209-217.
- Trinidad, A. (2014). Modelos de crecimiento en biología, su significado biológico y selección del modelo por su ajuste. *Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa*.
- Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338-353.
- Zadeh, L. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. *Information sciences*, 8(3), 199-249.